REGLAS DE CONTEO

- **DIAGRAMA DE ÁRBOL :** es una representación gráfica que permite visualizar un experimento de pasos múltiples.
  - **EJEMPLOS 1:** Considere un experimento que consiste en lanzar dos monedas. Defina los resultados experimentales en términos de las caras y cruces que se observan en las dos monedas. ¿Cuántos resultados experimentales tiene este experimento?
  - **EJEMPLOS 2:** Suponga que de un proceso de fabricación se seleccionan tres artículos de forma aleatoria. Cada artículo se inspecciona y clasifica como defectuoso, D, o sin defectos (no defectuoso), N. Cuántos resultados experimentales tiene este experimento?
  - **EJEMPLOS 2:** ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar las personas *a*, *b* y *c* en una fila de

REGLAS DE CONTEO

- **LA REGLA *MN* EXTENDIDA:** Si un experimento se realiza en k etapas, con n_1 formas para efectuar la primera etapa, n_2 formas para efectuar la segunda etapa, . . . , y n_k formas para efectuar la *k-ésima* etapa, entonces el número de formas para efectuar el experimento es:

$$E = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots n_k$$

- **EJEMPLO 1:** ¿Cuántos eventos simples hay en el espacio muestral cuando se lanzan al aire tres monedas?

- **EJEMPLO 2:** El chofer de un camión puede tomar tres rutas de la ciudad *A* a la ciudad *B*, cuatro de la ciudad *B* a la *C* y tres de la ciudad *C* a la *D*. Si, cuando viaja de *A* a *D*, el chofer debe ir de *A* a *B* a *C* a *D*, ¿cuántas rutas posibles de *A* a *D* hay?

REGLAS DE CONTEO

COMBINACIONES: El número de combinaciones de *N* objetos tomados de *n* en *n*, *(dado que en la muestra no exista orden ni repetición)* es:

$$C_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$donde: N! = N(N-1)(N-2)...(2)(1)$$

$$n = n! = n(n-1)(n-2)...(2)(1),$$

$$y \;\; por \;\; definición: 0! = 1$$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- **EJEMPLO 1:** ¿De cuántas maneras pueden colocarse 10 objetos en dos grupos, uno de 4 y otro de 6 objetos?

- **EJEMPLO 2:** Encontrar el número de distintos comités de tres elementos que es posible formar, a partir de un grupo de 6 personas.

- **EJEMPLO 3:** Una tarjeta de circuito impreso se puede comprar de entre cinco proveedores. ¿En cuántas formas se pueden escoger tres proveedores de entre los cinco?

REGLAS DE CONTEO

- **REGLA DE CONTEO PARA PERMUTACIONES:** El número de permutaciones de N objetos tomados de n en n, *(dado que en la muestra se considere el orden y no hayan repeticiones)*. está dado por:

$$P_n^N = n!\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!}$$

$$donde: \ N! = N(N-1)(N-2)...(2)(1)$$

$$n = n! = n(n-1)(n-2)...(2)(1),$$

$$y \ \ por \ \ definición: 0! = 1$$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- **EJEMPLO 1:** un inspector selecciona dos de cinco piezas para probar que no tienen defectos. ¿Cuántas permutaciones puede seleccionar?

- **EJEMPLO 2:** Tres billetes de lotería se sacan de entre un total de 50. Si los billetes se han de distribuir a cada uno de tres empleados en el orden en que son sacados, el orden será importante. ¿Cuántos eventos simples están asociados con el experimento?

- **EJEMPLO 3:** Una máquina está compuesta de cinco partes que se pueden ensamblar en cualquier orden. Se ha de realizar una prueba para determinar el tiempo necesario para cada orden de ensamble. Si cada orden se ha de probar una vez, ¿cuántas pruebas deben efectuarse?

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- **¿ Qué es una Variable aleatoria?**

  – Una variable es aleatoria si toma diferentes valores como resultado de un experimento aleatorio. Esta variable aleatoria puede ser discreta o continua.

  – Una variable aleatoria es una especie de valor o magnitud que cambia de una ocurrencia a otra sin seguir una secuencia predecible.

  – Una variable aleatoria es una función que asocia un número real con cada elemento del espacio muestral.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

EJEMPLO: Se sacan 2 bolas de manera sucesiva sin reemplazo, de una urna que contiene 4 bolas rojas y 3 negras. Los posibles resultados y los valores y de la variable aleatoria Y, donde Y es el número de bolas rojas, son:

Espacio Muestral	y
RR	2
RB	1
BR	1
BB	0

EJEMPLO: A continuación se da una serie de experimentos y su variable aleatoria correspondiente. En cada caso determine qué valores toma la variable aleatoria y diga si se trata de una variable aleatoria discreta o continua.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Experimento	Variable aleatoria (x)
a. Hacer un examen con 20 preguntas	Número de preguntas contestadas correctamente
b. Observar los automóviles que llegan a una caseta de peaje en 1 hora	Número de automóviles que llegan a la caseta de peaje
c. Revisar 50 declaraciones de impuestos	Número de declaraciones que tienen algún error
d. Observar trabajar a un empleado	Número de horas no produtivas en una jornada de 8 horas
c. Pesar un envió	Número de libras

Institución Universitaria

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- **¿Qué es una distribución de probabilidad?**

  El conjunto de pares ordenados (x, f(x)) es una función de probabilidades, una función de masa de probabilidad o una distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta X si, para cada resultado posible x,

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_{x} f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$
4. $Valor\ esperado\ E(x) = \mu = \sum x f(x)$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

EJEMPLO: La tabla siguiente es una distribución parcial de probabilidades para las ganancias proyectadas de MRA Company (x ganancias en miles de dólares) durante el primer año de operación (los valores negativos indican pérdida).

x	*f(x)*
-100	0.10
0	0.20
50	0.30
100	0.25
150	0.10
200	
Total	
Valor esperado	

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

a. ¿Cuál es el valor adecuado para *f(200)?* ¿Qué interpretación le da a este valor?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa sea rentable?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa gane por lo menos $100 000?.
d. Trace una gráfica de la distribución de probabilidad hipotética.
a. Calcule el valor esperado del resultado de ganacia.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- **EJEMPLO:** Construya una distribución de probabilidad con base en la siguiente distribución de frecuencias.

Resultado	102	105	108	111	114	117
Frecuencia	10	20	45	15	20	15

a. Trace una gráfica de la distribución de probabilidad hipotética.

a. Calcule el valor esperado del resultado.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- **EJEMPLO:** Bob Walters, quien invierte con frecuencia en el mercado de valores, estudia con detenimiento cualquier inversión potencial. En la actualidad examina la posibilidad de invertir en la Trinity Power Company. Me- diante el estudio del rendimiento en el pasado, Walters ha desglosado los resultado potenciales en cinco resultado posibles con sus probabilidades asociadas. Los resultados son tasas de rendimiento anuales so- bre una sola acción que hoy cuesta $150. Encuentre el valor esperado del rendimiento sobre la inversión en una sola acción de Trinity Power.

Rendimiento de la inversión ($)	0.00	10.00	15.00	25.00	50.00
Probabilidad	0.20	0.25	0.30	0.15	0.10

Si Walters compra acciones siempre que la tasa de rendimiento esperada exceda al 10%, ¿comprará la acción, de acuerdo con estos datos?

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- **La Distribución Binominal:** la Probabilidad de *r* éxitos en *n* intentos:

$$P(r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r}$$

$p = \text{ probabilidad característica o probabilidad de tener éxito.}$

$q = 1 - p = \text{probabilidad de fracaso}$

$r = \text{número de éxito deseados}$

$n = \text{número de intentos hechos}$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- **EJEMPLO:** Para una distribución binomial con $n = 12$ y $p = 0.45$, Calcule las siguentes Probabilidades:

a. P(r = 8).

b. P(r =5)

c. P(r > 4) =

d. P(r ≤ 10) =

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- **EJEMPLO:** El último sondeo político nacional indica que la probabilidad de que estadounidenses elegidos al azar sean conservadores es de 0.55; de que sean liberales es de 0.30, y de que estén entre una y otra orientación es 0.15. Suponga que estas probabilidades son exactas y responda a las siguientes preguntas referidas a un grupo de 10 estadounidenses seleccionados de manera aleatoria. (No use la tabla 3 del apéndice.)

a) ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro sean liberales?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno sea conservador?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que dos estén entre una y otra orientación?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos ocho sean liberales?

Institución Universitaria

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- Cálculo de Distribución de Probabilidades mediante tablas :

EJEMPLO: $n = 10,\ x = 3,\ p = 0.40;\ f(3) = 0.2150$

						p					
n	***x***	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176
	2	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703
	3	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641
	4	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461
	5	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	2	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	3	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	**0.2150**	0.1665	0.1172
	4	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	7	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- **Media de una distribución binomial:**

  Simbólicamente, se puede representar la media de una distribución binomial como: $\mu = np$

  $$n = número\ \ de\ \ éxitos$$

  $$p = \ probabilidad\ \ de\ \ tener\ \ éxito$$

- **Desviación estándar de una distribución binomial:** se puede calcular la desviación estándar de una distribución binomial haciendo uso de la fórmula: $\sigma = \sqrt{npq}$

  $$n = número\ \ de\ \ éxitos$$

  $$p = \ probabilidad\ \ de\ \ tener\ \ éxito$$

  $$q = probabilidad\ \ de\ \ fracaso = 1 - p$$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- **EJEMPLO:** Encuentre la media y la desviación estándar de las siguientes distribuciones binomiales:

   a. $n = 16, \quad p = 0.40.$

   b. $n = 10, \quad p = 0.75.$

   c. $n = 22, \quad p = 0.15.$

   d. $n = 350, \quad p = 0.90.$

   e. $n = 78, \quad p = 0.05.$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- **La distribución de Poisson:** La probabilidad de tener exactamente *x* ocurrencias en una distribución de Poisson se calcula con la fórmula:

$$P(x) = \frac{\mu^x \times e^{-\mu}}{x!}$$

$$P(x) = probabilidad\ de\ x\ ocurrencia\ en\ un\ \text{int}ervalo.$$

$$\mu = Valor\ esperado\ o\ número\ de\ medio\ de\ ocurrencia.$$

$$e = 2.71828$$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

EJEMPLO: Durante un experimento de laboratorio el número promedio de partículas radiactivas que pasan a través de un contador en un milisegundo es 4. ¿Cuál es la probabilidad de que entren 6 partículas al contador en un milisegundo dado?

EJEMPLO: El número promedio de camiones-tanque que llega cada día a cierta ciudad portuariaes 10. Las instalaciones en el puerto pueden alojar a lo sumo 15 camiones-tanque por día. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día determinado lleguen más de 15 camiones y se tenga que rechazar algunos?

EJEMPLO: Mediante la tabla de problaidades de poisson el valor de $f(5)$; si $\mu = 10, x = 5.$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

	μ									
x	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
2	0.0046	0.0043	0.0040	0.0037	0.0034	0.0031	0.0029	0.0027	0.0025	0.0023
3	0.0140	0.0131	0.0123	0.0115	0.0107	0.0100	0.0093	0.0087	0.0081	0.0076
4	0.0319	0.0302	0.0285	0.0269	0.0254	0.0240	0.0226	0.0213	0.0201	0.0189
5	0.0581	0.0555	0.0530	0.0506	0.0483	0.0460	0.0439	0.0418	0.0398	0.0378
6	0.0881	0.0851	0.0822	0.0793	0.0764	0.0736	0.0709	0.0682	0.0656	0.0631
7	0.1145	0.1118	0.1091	0.1064	0.1037	0.1010	0.0982	0.0955	0.0928	0.0901
8	0.1302	0.1286	0.1269	0.1251	0.1232	0.1212	0.1191	0.1170	0.1148	0.1126
9	0.1317	0.1315	0.1311	0.1306	0.1300	0.1293	0.1284	0.1274	0.1263	0.1251
10	0.1198	0.1210	0.1219	0.1228	0.1235	0.1241	0.1245	0.1249	0.1250	0.1251
11	0.0991	0.1012	0.1031	0.1049	0.1067	0.1083	0.1098	0.1112	0.1125	0.1137
12	0.0752	0.0776	0.0799	0.0822	0.0844	0.0866	0.0888	0.0908	0.0928	0.0948
13	0.0526	0.0549	0.0572	0.0594	0.0617	0.0640	0.0662	0.0685	0.0707	0.0729
14	0.0342	0.0361	0.0380	0.0399	0.0419	0.0439	0.0459	0.0479	0.0500	0.0521
15	0.0208	0.0221	0.0235	0.0250	0.0265	0.0281	0.0297	0.0313	0.0330	0.0347
16	0.0118	0.0127	0.0137	0.0147	0.0157	0.0168	0.0180	0.0192	0.0204	0.0217
17	0.0063	0.0069	0.0075	0.0081	0.0088	0.0095	0.0103	0.0111	0.0119	0.0128
18	0.0032	0.0035	0.0039	0.0042	0.0046	0.0051	0.0055	0.0060	0.0065	0.0071
19	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0023	0.0026	0.0028	0.0031	0.0034	0.0037
20	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019
21	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
22	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004
23	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- **La distribución de Poisson como una aproximación de la distribución binomial:**

Por coneveniencia en estadística La regla se que utilizan con más frecuencia, es que la distribución de Poisson es una buena aproximación de la distribución binomial cuando *n* es igual o mayor que 20 y *p* es igual o menor a 0.05.

$$si\ sabemos\ que\ \mu = np,\ entonces\ tenemos\ que:.$$

$$P(x) = \frac{(np)^{x} \times e^{-np}}{x!}$$

$$P(x) = probabilidad\ de\ x\ ocurrencia\ en\ un\ \text{int}ervalo.$$

$$\mu = np = Valor\ esperado\ o\ número\ medio\ de\ ocurrencia.$$

$$e = 2.71828$$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- **EJEMPLO:** En cierta fábrica los accidentes ocurren con muy poca frecuencia. Se sabe que la proba- bilidad de un accidente en cualquier día dado es de 0.005, y que los accidentes son inde- pendientes entre sí.
  a. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día de cualquier periodo determinado de 400 días ocurra un accidente?
  b. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra un accidente a lo sumo en tres días de tal periodo?

- **EJEMPLO:** En un proceso de fabricación donde se manufacturan productos de vidrio ocurren defectos o burbujas, lo cual ocasionalmente hace que la pieza ya no se pueda vender. Se sabe que, en promedio, 1 de cada 1000 artículos producidos tiene una o más burbujas. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 8000 tenga menos de 7 artículos con burbujas?