DIVISIÓN DE POLINOMIOS

La división de polinomios es similar al proceso de dividir números.

División larga de polinomios.

Ejemplo: Dividir $6x^4+5x^3-7x^2+3x+2$ entre $2x^2+3x-1$

$$
\begin{array}{l|l}
6x^4+5x^3-7x^2+3x+2 & \underline{2x^2+3x-1} \\
\underline{-6x^4-9x^3+3x^2} & 3x^2-2x+1 \\
\quad -4x^3-4x^2+3x+2 & \\
\quad \underline{+4x^3+6x^2-2x\quad\quad} & \\
\quad\quad +2x^2+1x+2 & \\
\quad\quad \underline{-2x^2-3x+1} & \\
\quad\quad\quad -2x+3 &
\end{array}
$$

Por tanto: $D(x)=3x^2-2x+1$ y $R(x)=-2x+3$

Entonces $P(x)$ se puede expresar como: $P(x)=\left(2x^2+3x-1\right)\left(3x^2-2x+1\right)+(-2x+3)$

Algoritmo de la división.

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios con $D(x)\neq 0$, entonces existen polinomios únicos $Q(x)$ y $R(x)$ donde $R(x)$ es 0 o de grado menor que el grado de $D(x)$ tal que:

$$P(x)=D(x)\cdot Q(x)+R(x)$$

Los polinomios $P(x)$ y $D(x)$ se llaman dividendo y divisor, respectivamente, $Q(x)$ y $R(x)$ son el cociente y el residuo.

División sintética.

Es un método rápido para dividir polinomios: se puede usar cuando el divisor está en la forma $x-c$.

Ejemplo: Dividir $2x^3+3x^2-4$ entre $x+1$

Se deben colocar todos los grados de la x, quedando de la siguiente forma $2x^3+3x^2+0x-4$ entre $x-(-1)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 3 & 0 & -4 \\
-1 & & -2 & -1 & 1 \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & -3
\end{array}
$$

Por tanto: $D(x)=2x^2+x-1$ y $R(x)=-3$

Entonces $P(x)$ se puede expresar como: $P(x)=\left(2x^2+x-1\right)(x+1)-3$

Encontrar el cociente y el residuo de las siguientes divisiones

1. $x^4-6x^3+2x^2+3x-4\div x^2+x+2$ Rta: $D(x)=x^2-7x+7$ $R(x)=10x-18$
2. $x^4-5x^3+11x^2-12x+6\div x^2-x+2$ Rta: $D(x)=x^2-4x+5$ $R(x)=x-4$
3. $2x^3-3x^2-2x\div 2x-3$ Rta: $D(x)=x^2$ $R(x)=-2x$
4. $4x^3+7x+9\div 2x+1$ Rta: $D(x)=2x^2-x+4$ $R(x)=5$
5. $6x^4-x^3+5x^2+3x-14\div 2x^2-3x+7$ Rta: $D(x)=3x^2+4x-2$ $R(x)=-31x$
6. $x^3+4x^2-6x+1\div x-1$ Rta: $D(x)=x^2+5x-1$ $R(x)=0$
7. $3x^2+5x-4\div x+3$ Rta: $D(x)=3x-4$ $R(x)=8$
8. $x^4-x^3+4x+2\div x^2+3$ Rta: $D(x)=x^2-x-3$ $R(x)=7x+11$
9. $2x^5+4x^4-4x^3-x-3\div x^2-2$ Rta: $D(x)=2x^3+4x^2+8$ $R(x)=-x+13$
10. $x^2+4x-8\div x+3$ Rta: $D(x)=x+1$ $R(x)=-11$
11. $x^3+6x+5\div x-4$ Rta: $D(x)=x^2+4x+22$ $R(x)=93$
12. $4x^2-3x-7\div 2x-1$ Rta: $D(x)=2x-{}^1\!/_2$ $R(x)=-{}^{15}\!/_2$
13. $6x^3+x^2-12x+5\div 3x-4$ Rta: $D(x)=2x^2+3x$ $R(x)=5$
14. $x^3-27\div x-3$ Rta: $D(x)=x^2+3x+9$ $R(x)=x-3$
15. $x^4-16\div x+2$ Rta: $D(x)=x^3-2x^2+4x-8$ $R(x)=0$
16. $x^4-x^3+x^2-x+2\div x-2$ Rta: $D(x)=x^3+x^2+3x+5$ $R(x)=12$
17. $2x^4-x^3+9x^2\div x^2+4$ Rta: $D(x)=2x^2-x+1$ $R(x)=4x-4$
18. $\dfrac{2x^4-x^3+9x^2}{x^3+4}$ Rta: $D(x)=2x-1$ $R(x)=9x^2-8x+4x$
19. $\dfrac{x^5+3x^3-6}{x-1}$ Rta: $D(x)=x^4+x^3+4x^2+4x+4$ $R(x)=-2$
20. $\dfrac{x^3-9x^2+27x-27}{x-3}$ Rta: $D(x)=x^2-6x+9$ $R(x)=0$
21. $\dfrac{2x^3+3x^2-2x+1}{x-{}^1\!/_2}$ Rta: $D(x)=2x^2+4x$ $R(x)=1$
22. $\dfrac{6x^4+10x^3+5x^2+x+1}{x+{}^2\!/_3}$ Rta: $D(x)=6x^3+6x^2+x+{}^1\!/_3$ $R(x)={}^7\!/_9$

23. $\dfrac{4x^3+2x^2-2x-3}{2x+1}$ Rta: $D(x)=2x^2-1$ $R(x)=-2$

24. $\dfrac{x^3+6x+3}{x^2-2x+2}$ Rta: $D(x)=x+2$ $R(x)=8x-1$

25. $\dfrac{6x^3+2x^2+22x}{2x^2+5}$ Rta: $D(x)=3x+1$ $R(x)=1$

26. $\dfrac{x^2-6x-8}{x-4}$ Rta: $D(x)=x-2$ $R(x)=-16$

27. $\dfrac{x^6+x^4+x^2+1}{x^2+1}$ Rta: $D(x)=x^4+1$ $R(x)=0$

28. $\dfrac{x^3-x^2-2x+6}{x-2}$ Rta: $D(x)=x^2+x$ $R(x)=6$

29. $\dfrac{x^3+3x^2+4x+3}{3x+6}$ Rta: $D(x)=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$ $R(x)=-1$

30. $\dfrac{3x^4-5x^3-20x-5}{x^2+x+3}$ Rta: $D(x)=3x^2-8x-1$ $R(x)=5x-2$

31. $\dfrac{9x^2-x+5}{3x^2-7x}$ Rta: $D(x)=3$ $R(x)=20x+5$

32. $\dfrac{2x^5-7x^4-13}{4x^2-6x+8}$ Rta: $D(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{7}{4}$ $R(x)=\dfrac{19}{2}x+1$

33. $\dfrac{x^2-5x+4}{x-3}$ Rta: $D(x)=x-2$ $R(x)=-2$

34. $\dfrac{3x^2+5x}{x-6}$ Rta: $D(x)=3x+23$ $R(x)=138$

35. $\dfrac{x^2-5x+4}{x-1}$ Rta: $D(x)=x-4$ $R(x)=0$

36. $\dfrac{4x^2-3}{x+5}$ Rta: $D(x)=4x-20$ $R(x)=93$

37. $\dfrac{x^3-8x+2}{x+3}$ Rta: $D(x)=x^2-3x+1$ $R(x)=-1$

38. $\dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{x+2}$ Rta: $D(x)=x^2+2$ $R(x)=-3$

39. $\dfrac{3x^3-12x^2-9x+1}{x-5}$ Rta: $D(x)=3x^2+3x+6$ $R(x)=31$

40. $\dfrac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 2}{x-2}$ Rta: $D(x) = x^3 + x^2 + 3x + 5$ $R(x) = 12$

41. $\dfrac{3x^5 + 2x + 1}{x+1}$ Rta: $D(x) = 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ $R(x) = -4$

42. $\dfrac{x^6 + x^2 - 3}{x+3}$ Rta: $D(x) = x^5 - 3x^4 + 9x^3 - 27x^2 + 82x - 246$ $R(x) = 735$

43. $\dfrac{x^9 + x^5 + 1}{x-2}$ Rta: $D(x) = x^8 + 2x^7 + 4x^6 + 8x^5 + 17x^4 + 34x^3 + 68x^2 + 136x + 272$

$R(x) = 545$

Teorema del residuo y del factor.

Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es el valor $P(c)$

Esta expresión resultará muy útil para calcular el residuo de la división de un polinomio $P(x)$ entre $x - a$, sin efectuar la división, algo que será muy útil en situaciones como esta:
$\dfrac{x^{99} + 1}{x-1}$ entonces $R(x) = P(1) = 1^{99} + 1 = 1 + 1 = 2$ el residuo de esta división es 2

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
44) $\dfrac{5x^4 - 3x^2 + 6x - 1}{x-1}$	7	45) $\dfrac{x^6 + 64}{x-2}$	128	46) $\dfrac{x^4 - 16}{x+2}$	0
47) $\dfrac{3x^6 + 3x - 2}{x+2}$	196	48) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x-3}$	0	49) $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 3}{x-1}$	-4
50) $\dfrac{2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5x + 10}{x+2}$	60	51) $\dfrac{a^3 - 1}{a-1}$	0	52) $\dfrac{x^4 - 3x^3 + 4}{x+2}$	44

Teorema del factor
c es un cero de P sí y sólo sí $x - c$ es un factor de $P(x)$

En otras palabras, para saber si $P(x)$ es divisible entre $x - c$, basta con comprobar que $P(c) = 0$. A este resultado se le llama Teorema del Factor

Ejemplo:
Sea $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$. Muestre que $P(1) = 0$ y utilice este hecho para factorizar $P(x)$ por completo.

$P(1) = (1)^3 - (1)^2 - 4(1) + 4 = 0$

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x^2-4)(x-1)=(x+2)(x-2)(x-1)$$

Entonces $x^3-x^2-4x+4=(x+2)(x-2)(x-1)$

Mostrar que los valores dados para c son ceros de $P(x)$, hallar los otros ceros de $P(x)$.

53) $P(x)=x^3-x^2-11x+15$ $\quad c=3$ $\quad$ Rta: $c=-1\pm\sqrt{6}$

54) $P(x)=3x^4-x^3-21x^2-11x+6$ $\quad c=1/3$ $\quad$ Rta: $c=-2,-1,3$

55) $P(x)=x^3+5x^2+3x-9$ $\quad c=1$ $\quad$ Rta: $c=-3$

56) $P(x)=x^3-6x^2-x+6$ $\quad c=-1$ $\quad$ Rta: $c=1,6$

57) $P(x)=x^4-9x^2+4x+12$ $\quad c=-1$ $\quad$ Rta: $c=-3,2$

58) $P(x)=x^3+3x^2-4x-12$ $\quad c=2$ $\quad$ Rta: $c=-2,-3$

59) $P(x)=6x^3+7x^2-9x+2$ $\quad c=1/2$ $\quad$ Rta: $c=-2,1/3$

60) $P(x)=2x^4-5x^3+5x-2$ $\quad c=1/2$ $\quad$ Rta: $c=-1,1,2$

61) $P(x)=x^4-6x^3-11x^2+96x-80$ $\quad c=5$ $\quad$ Rta: $c=-4,1,4$

Encuentre un polinomio de grado especifícado que tenga los ceros dados:

62) Grado 3, ceros -1,1,3 Rta: $P(x)=x^3-3x^2-x+3$

63) Grado 4, ceros -2,0,2,4 Rta: $P(x)=x^4-4x^3-4x^2+16x$

64) Grado 4, ceros -1,1,3,5 Rta: $P(x)=x^4-8x^3+14x^2+8x-15$

65) Grado 4, ceros -3,0,1,5 Rta: $P(x)=x^4-3x^3-13x^2+15x$