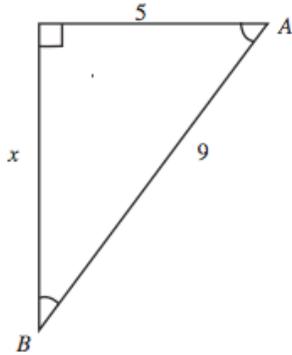


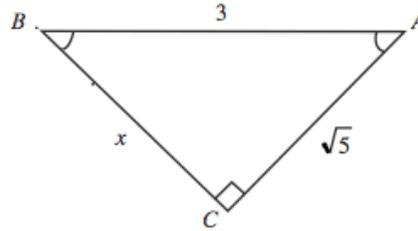
## TALLER DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS Y TRIÁNGULO RECTANGULO LEY DE SENOS Y COSENOS.

1. Obtén el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos, en los siguientes triángulos:

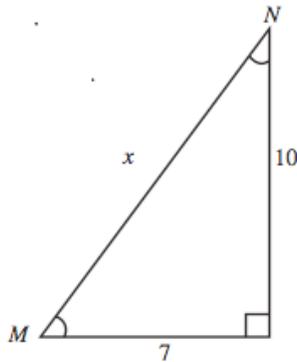
a)



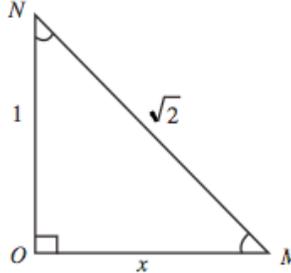
c)



b)



d)



2. Obtén el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos en los siguientes triángulos rectángulos:

a) Si  $\theta$  y  $\alpha$  son los ángulos agudos y  $\cos \theta = \frac{1}{5}$

d) Si  $\theta$  y  $\alpha$  son los ángulos agudos y  $\sec \theta = 2\sqrt{3}$

b) Si  $\angle A$  y  $\angle B$  son complementarios y  $\tan B = \frac{2}{3}$

e) Si  $\alpha + \beta = 90^\circ$  y  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$

c) Si  $\angle M$  y  $\angle N$  son complementarios y  $\operatorname{csc} N = 2$

f)  $\operatorname{sen} A = \frac{4}{\sqrt{29}}$  y  $\angle B$  es complemento de  $\angle A$

3. Determina las funciones trigonométricas del ángulo agudo  $\beta = \angle XOA$  que forman el punto  $A(2, 3)$  y el eje horizontal.

4. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo agudo  $\omega = \angle XOB$  que forman el punto  $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  y el eje horizontal.

5. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo  $\alpha$ , si se encuentra en el tercer cuadrante con  $\operatorname{csc} \alpha = -\frac{3}{2}$

6. Determina las funciones trigonométricas del ángulo  $\alpha$ , si se encuentra en el cuarto cuadrante con  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{2}{\sqrt{7}}$

7. Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo  $\beta$ , si se sabe que  $\cos \beta = -\frac{9}{13}$  y  $90^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$

8. Obtén las funciones trigonométricas del ángulo  $\omega$ , si se sabe que  $\operatorname{ctg} \omega = -8$  y  $\frac{3\pi}{2} \leq \omega \leq 2\pi$

Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones sin usar calculadora:

$$9. 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \left( \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} \right)$$

$$10. 2 \operatorname{sen} 30^\circ \cos 30^\circ (1 - 2 \operatorname{sen}^2 30^\circ)$$

$$11. \tan^2 \frac{5}{3} \pi + 4 \operatorname{sen} \frac{5}{6} \pi - 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{5}{4} \pi$$

$$12. \frac{\cos 120^\circ + \sec 180^\circ}{\csc 270^\circ + \operatorname{sen} 330^\circ}$$

$$13. \left[ \frac{(\operatorname{sen} 120^\circ)(\tan 240^\circ)}{\tan 315^\circ - \cos 300^\circ} \right]^3$$

$$14. \sqrt{(\tan 225^\circ)(\operatorname{sen} 180^\circ)(\cos 240^\circ)}$$

$$15. \operatorname{sen} 90^\circ + (\cos 210^\circ + \operatorname{sen} 300^\circ)^2 + \sec 240^\circ$$

Utiliza ángulos notables para demostrar las siguientes igualdades:

$$16. \frac{\operatorname{sen} 240^\circ + \operatorname{sen} 120^\circ \cdot \cos 60^\circ}{\operatorname{sen} 120^\circ \cdot \operatorname{sen}(-60^\circ)} = \tan 210^\circ$$

$$17. \tan \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{sen} \frac{2}{3} \pi = 1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$$

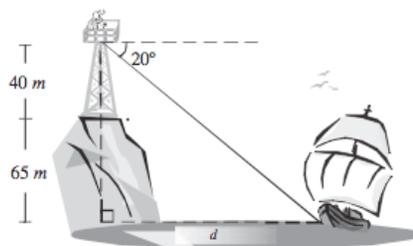
$$18. \operatorname{sen} 180^\circ = 2 \operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{sen} 240^\circ (\sec 45^\circ)^2$$

$$19. \cos 225^\circ + 3 \operatorname{sen} 225^\circ = -2 \sec 45^\circ$$

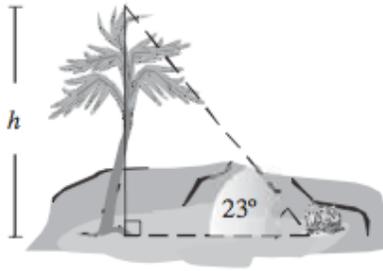
$$20. \csc 60^\circ = -\frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 150^\circ \cdot \operatorname{sen} 300^\circ}$$

Resuelve los siguientes problemas:

21. En una torre de 40 m que está sobre un peñasco de 65 m de alto junto a una laguna, se encuentra un observador que mide el ángulo de depresión de  $20^\circ$  de un barco situado en la laguna. ¿A qué distancia de la orilla del peñasco se encuentra el barco?



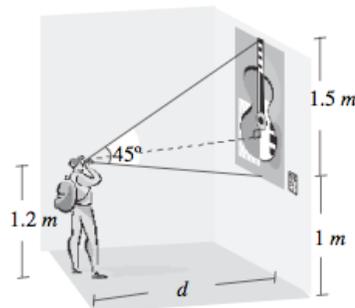
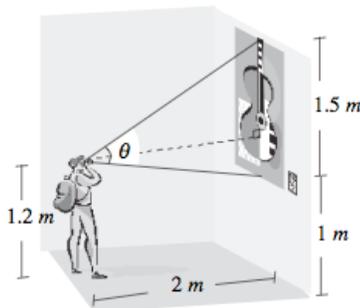
22. A una distancia de 10 m de la base de un árbol, la punta de éste se observa bajo un ángulo de  $23^\circ$ . Calcula la altura del árbol.



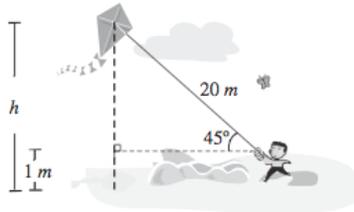
23. Una persona cuyos ojos están a 1.20 metros del suelo, observa una pintura que se encuentra a un metro del suelo y mide 1.50 metros. Dicha persona se encuentra a dos metros de distancia de la pintura.

a) ¿Cuál es el ángulo de visión?

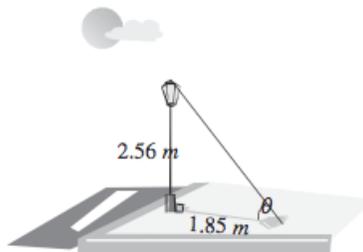
b) ¿A qué distancia se debe parar la persona para que el ángulo de visión sea de  $45^\circ$ ?



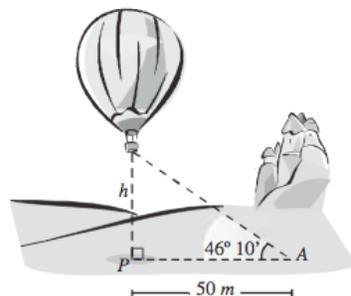
24. Un niño tiene un papalote, el cual hace volar sosteniendo una cuerda a un metro del suelo. La cuerda se tensa formando un ángulo de  $45^\circ$  con respecto a la horizontal. Obtén la altura del papalote con respecto al suelo si el niño suelta 20 metros de cuerda.



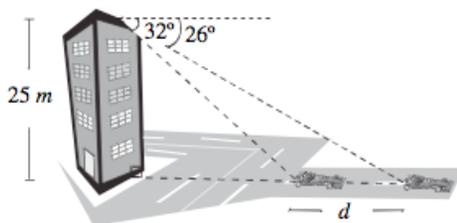
25. Determina el ángulo de elevación del Sol si un poste de 2.56 metros proyecta una sombra de 1.85 metros.



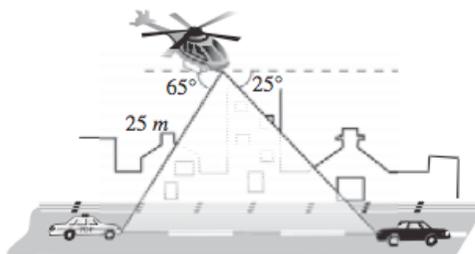
26. Un globo de aire caliente sube con un ángulo de elevación con respecto a un punto A de  $46^\circ 10'$ . Calcula la altura a la que se encuentra el globo, con respecto a un punto P del suelo, si la distancia de éste al punto A es de 50 metros.



27. Desde lo alto de una torre cuya altura es de  $25\text{ m}$ , se observa un automóvil alejándose de la torre, con un ángulo de depresión de  $32^\circ$ ; si un instante después el ángulo es de  $26^\circ$ , ¿qué distancia se ha desplazado el automóvil?



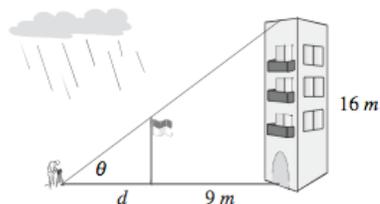
28. Un maleante es perseguido por un patrullero, quien es apoyado desde el aire por un helicóptero, como se muestra en la figura. Si el ángulo de depresión desde el helicóptero hasta donde se encuentra el delincuente es de  $25^\circ$  y el ángulo de depresión hasta donde se encuentra el patrullero es de  $65^\circ$ , y su distancia a éste es de  $25\text{ metros}$ ,



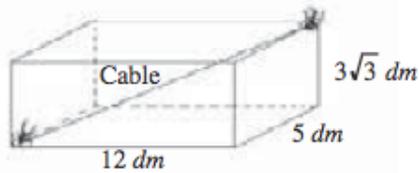
calcula:

- La distancia entre el helicóptero y el delincuente.
- La distancia entre el patrullero y el delincuente.
- La altura del helicóptero.

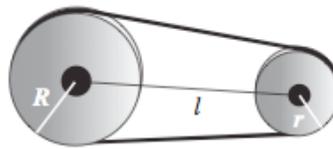
29. Un ingeniero civil desea conocer el ángulo de elevación del topógrafo, así como la distancia a la que se encuentra del asta bandera, si se sabe que el asta bandera mide la cuarta parte de la altura del edificio que es de  $16\text{ metros}$ , y la distancia entre ambas es de  $9\text{ metros}$ .



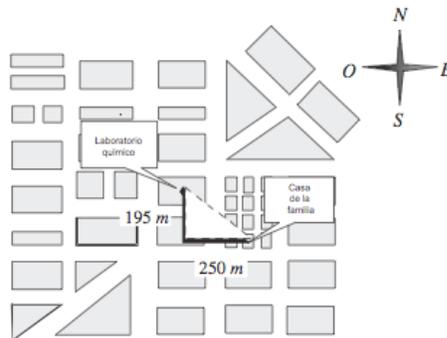
30. Una araña que se encuentra en la base de una caja desea alcanzar una mosca ubicada en la esquina opuesta de la caja, como se muestra en la figura. Las esquinas están conectadas por un cable tenso, determina cuál es el ángulo de elevación del cable y la distancia que recorrería la araña hasta llegar a la mosca por el cable.



31. Se tienen dos poleas de radios  $R$ ,  $r$  y la distancia entre sus ejes es  $l$ , ¿cuál es la longitud de la cadena de transmisión?



32. Debido a un accidente en unos laboratorios químicos, se tuvieron que desalojar las casas que estuvieran en un radio de  $500\text{ m}$  de los laboratorios. Una familia vivía a  $250\text{ m}$  al este y  $195\text{ m}$  al sur de los laboratorios. Determina si la familia desalojó su casa.



### LEY DE SENOS Y COSENOS

Solución de triángulos oblicuángulos

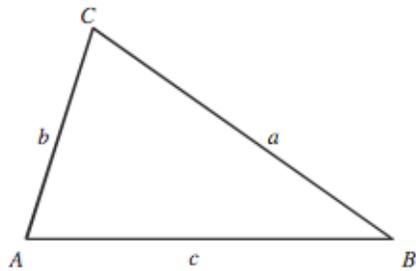
Un triángulo es oblicuángulo cuando sus tres ángulos son oblicuos, es decir, no tiene un ángulo recto. Este tipo de triángulos se resuelven mediante la ley de senos, de cosenos o de tangentes.

Ley de senos

La razón que existe entre un lado de un triángulo oblicuángulo y el seno del ángulo opuesto a dicho lado es proporcional a la misma razón entre los lados y ángulos restantes.

La ley de senos se utiliza cuando:

- Ú Los datos conocidos son 2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- Ú Los datos conocidos son 2 ángulos y cualquier lado.



Ley de senos:

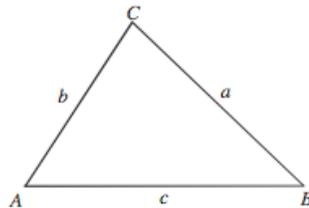
$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Ley de cosenos

El cuadrado de un lado de un triángulo oblicuángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados restantes, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo opuesto al lado buscado.

La ley de cosenos se utiliza cuando:

- Se tiene el valor de 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos.
- Se tiene el valor de los 3 lados.



Ley de cosenos:

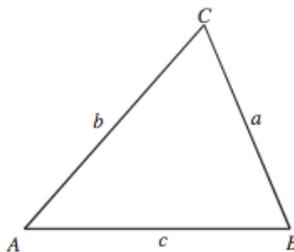
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

### EJERCICIOS PROPUESTOS SOBRE LA LEY DE SENOS Y COSENOS.

Resuelve el siguiente triángulo oblicuángulo de acuerdo con los datos proporcionados.



1.  $\angle B = 57^\circ 20'$ ,  $\angle C = 43^\circ 39'$ ,  $b = 18$
2.  $\angle A = 63^\circ 24'$ ,  $\angle C = 37^\circ 20'$ ,  $c = 32.4$
3.  $\angle A = 85^\circ 45'$ ,  $\angle B = 26^\circ 31'$ ,  $c = 43.6$
4.  $\angle C = 49^\circ$ ,  $\angle A = 54^\circ 21'$ ,  $a = 72$
5.  $\angle B = 29^\circ$ ,  $\angle C = 84^\circ$ ,  $b = 12.3$

6.  $\angle A = 32^\circ$ ,  $\angle B = 49^\circ$ ,  $a = 12$
7.  $a = 5$ ,  $\angle A = 32^\circ$ ,  $b = 8$
8.  $c = 13$ ,  $b = 10$ ,  $\angle C = 35^\circ 15'$
9.  $\angle B = 56^\circ 35'$ ,  $b = 12.7$ ,  $a = 9.8$
10.  $a = 9$ ,  $c = 11.5$ ,  $\angle C = 67^\circ 21'$
11.  $a = 15$ ,  $b = 16$ ,  $c = 26$
12.  $a = 32.4$ ,  $b = 48.9$ ,  $c = 66.7$
13.  $a = 100$ ,  $b = 88.7$ ,  $c = 125.5$
14.  $a = 15$ ,  $b = 12$ ,  $c = 20$
15.  $a = 12$ ,  $b = 15$ ,  $\angle C = 68^\circ$
16.  $a = 28$ ,  $c = 32$ ,  $\angle B = 76^\circ$
17.  $b = 45$ ,  $c = 75$ ,  $\angle A = 35^\circ$
18.  $a = 12.6$ ,  $b = 18.7$ ,  $\angle C = 56^\circ$

Demuestra que para el triángulo se cumple:

$$\ominus \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

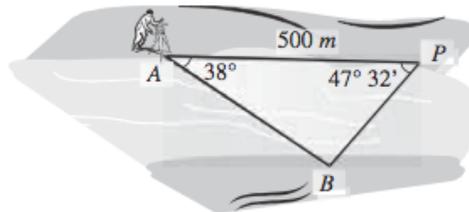
$$\ominus a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\ominus b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

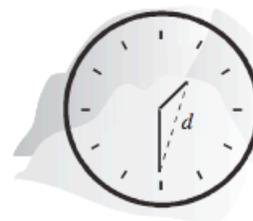
$$\ominus c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Resuelve los siguientes problemas:

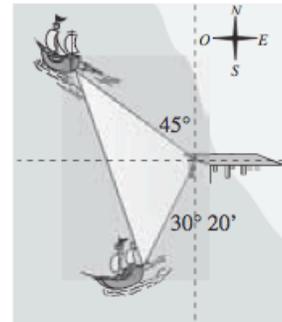
1. Para establecer la distancia desde un punto  $A$  en la orilla de un río a un punto  $B$  de éste, un agrimensor selecciona un punto  $P$  a 500 metros del punto  $A$ , las medidas de  $\angle BAP$  y  $\angle BPA$  son  $38^\circ$  y  $47^\circ 32'$ . Obtén la distancia entre  $A$  y  $B$ .



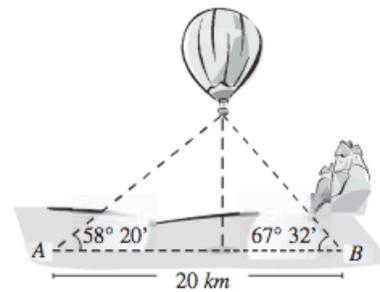
2. El horario y el minutero de un reloj miden respectivamente 0.7 y 1.2 cm. Determina la distancia entre los extremos de dichas manecillas a las 13:30 horas.



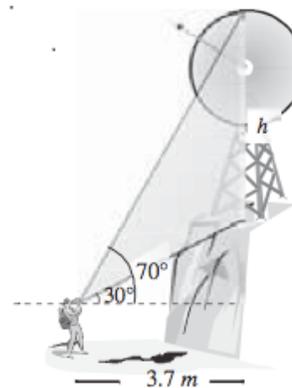
3. Un barco sale de un puerto a las 10:00 a.m. a  $10 \text{ km/h}$  con dirección sur  $30^\circ 20' \text{O}$ . Una segunda embarcación sale del mismo puerto a las 11:30 h a  $12 \text{ km/h}$  con dirección norte  $45^\circ \text{O}$ . ¿Qué distancia separa a ambos barcos a las 12:30 horas?



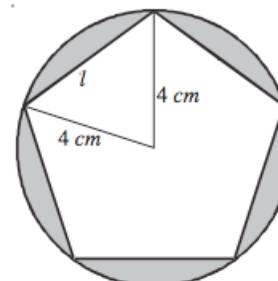
4. La distancia entre 2 puntos  $A$  y  $B$  es de  $20 \text{ km}$ . Los ángulos de elevación de un globo con respecto a dichos puntos son de  $58^\circ 20'$  y  $67^\circ 32'$ . ¿A qué altura del suelo se encuentra?



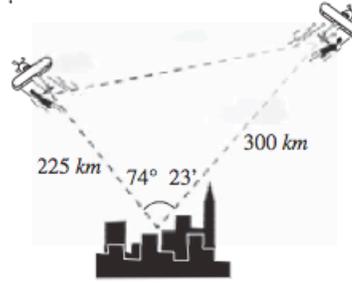
5. Una persona se encuentra a  $3.7 \text{ m}$  de un risco, sobre el cual se localiza una antena. La persona observa el pie de la antena con un ángulo de elevación de  $30^\circ$  y la parte superior de ésta con un ángulo de  $70^\circ$ . Determina la altura de la antena.



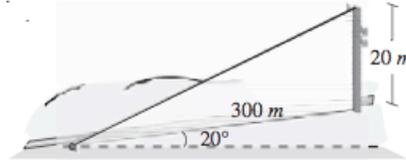
6. ¿Cuál es la longitud de los lados de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 4 centímetros de radio?



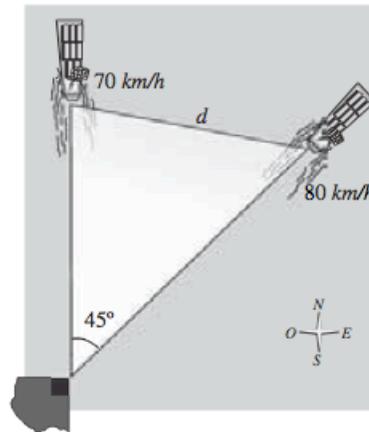
7. Dos aviones parten de una ciudad y sus direcciones forman un ángulo de  $74^\circ 23'$ . Después de una hora, uno de ellos se encuentra a  $225 \text{ km}$  de la ciudad, mientras que el otro está a  $300 \text{ km}$ . ¿Cuál es la distancia entre ambos aviones?



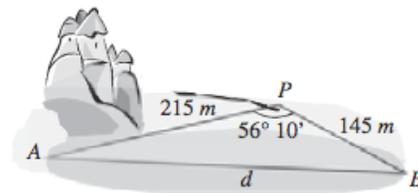
8. En un plano inclinado se encuentra un poste vertical de 20 metros de altura. Si el ángulo del plano con respecto a la horizontal es de  $20^\circ$ , calcula la longitud de un cable que llegaría de un punto a 300 metros cuesta abajo a la parte superior del poste.



9. Un barco parte de un puerto y navega hacia el norte con una velocidad de  $70 \text{ km/h}$  por hora. Al mismo tiempo, pero en dirección noreste, otro buque viaja a razón de  $80 \text{ km/h}$ . ¿A qué distancia se encontrarán uno del otro después de media hora?



10. La distancia que hay de un punto hacia los extremos de un lago son 145 y 215 metros, mientras que el ángulo entre las 2 visuales es de  $56^\circ 10'$ . Calcula la distancia entre los extremos del lago.



11. En un paralelogramo que tiene un lado que mide  $20.8 \text{ cm}$ , su diagonal mide  $46.3 \text{ cm}$ . Determina la longitud del otro lado si se sabe que el ángulo entre la diagonal y el primer lado es de  $28^\circ 30'$ .

