

FACTORIZACIÓN

Factorizar es escribir o representar una expresión algebraica como producto de sus factores.

Ejemplo: $x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$

Una expresión queda completamente factorizada cuando se representa como el producto de la mayor cantidad posible de factores de "primer grado" o "factores lineales". El tipo más sencillo de factorización se presenta cuando los términos tienen un factor común.

Obtención de factores comunes.

Esta será la primera factorización que se aplique a cualquier expresión algebraica de acuerdo a lo siguiente:

1. Se observa si la expresión algebraica cuenta con un término común, en el caso de las letras se toman las comunes con menor exponente, en el caso de los coeficientes se obtiene el máximo común divisor, este término o factor común deberá ser diferente a uno.
2. Una vez encontrando el término común se busca el otro factor el cual es el resultado de la división de la expresión entre el término común.

Ejemplo: factorizar

$$6x^2y^3 - 32x^3y^3 + 48x^2y$$

❖ Letras (términos comunes con menor exponente) : x^2y

❖ Números máximo común divisor: 2

$$2x^2y(3y^2 - 16xy^2 + 24)$$

Factorización por agrupación o asociación

Esta factorización se puede aplicar siempre y cuando el número de términos de la expresión algebraica sea par. Se procede de la siguiente manera:

1. Se agrupan las parejas que tienen factor común
2. Cada pareja se factoriza por el método del factor común, de tal manera que los términos que resulten dentro de los paréntesis deberán ser iguales de lo contrario se tendrá que buscar otra combinación.
3. La factorización se obtiene con el producto de los términos que quedaron dentro del paréntesis por los factores comunes que resultaron en la aplicación del primer método.

Ejemplo: Factorizar

$$ax + bx + ay + by$$
$$= x(a + b) + y(a + b)$$



Iguales

$$= (x + y)(a + b)$$

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas

- | | | |
|---------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $a^2 + ab$ | 2) $b + b^2$ | 3) $x^2 + x$ |
| 4) $3a^3 - a^2$ | 5) $x^3 - 4x^4$ | 6) $5m^2 + 15m^3$ |
| 7) $ab - bc$ | 8) $x^2y + x^2z$ | 9) $2a^2x + 6ax^2$ |
| 10) $24a^2xy^2 - 36x^2y^4$ | 11) $35m^2n^3 - 70m^3$ | 12) $15y^3 + 20y^2 - 5y$ |
| 13) $96 - 48mn^2 + 144n^2$ | 14) $34x^2 + 51a^2y - 68ay^2$ | 15) $x - x^2 + x^3 - x^4$ |
| 16) $ay + by + az + bz$ | 17) $8x + 16xw - 12y - 24yw$ | 18) $3x^3 - 9bx^2 - x + 3b$ |
| 19) $a^2 + ab + ax + bx$ | 20) $am - bm + an - bn$ | 21) $ax - 2bx - 2ay + 4by$ |
| 22) $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2$ | 23) $3m - 2n - 2nx^4 + 3mx^4$ | 24) $3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$ |
| 25) $4a^3 - 1 - a^2 + 4a$ | 26) $x + x^2 - xy^2 - y^2$ | 27) $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$ |
| 28) $3a - b^2 + 2b^2 - 6ax$ | 29) $6ax + 3a + 1 + 2x$ | 30) $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx$ |

Factorización de Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

Ejemplo: Factorizar $x^2 + 12x + 35$

Se necesita encontrar dos números cuyo producto sea 35 y cuya suma sea igual a 12. Se puede realizar por inspección

$$x^2 + 12x + 35 = (x + 7)(x + 5)$$

O utilizando la ecuación general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
31) $a^2 - 13a + 40$	$(a - 8)(a - 5)$	32) $n^2 + 28n - 29$	$(n - 1)(n + 29)$	33) $n^2 - 6n - 40$	$(n - 10)(n + 4)$
34) $m^2 + 13m - 30$	$(m - 2)(m + 15)$	35) $a^2 + 7a - 60$	$(a - 5)(a + 12)$	36) $a^2 + 14a + 33$	$(a + 11)(a + 3)$
37) $x^2 - 5x - 36$	$(x - 9)(x + 4)$	38) $a^2 - 2a - 35$	$(a - 7)(a + 5)$	39) $x^2 + x - 2$	$(x - 1)(x + 2)$
40) $a^2 - 11a + 28$	$(a - 7)(a - 4)$	41) $x^2 + 2x - 24$	$(x - 4)(x + 6)$	42) $x^2 - 2x - 8$	$(x - 4)(x + 2)$
43) $a^2 - 10a + 24$	$(a - 6)(a - 4)$	44) $x^2 - 3x - 28$	$(x - 7)(x + 4)$	45) $a^2 + 2a - 63$	$(a - 7)(a + 9)$

Factorización de Trinomios de la forma ax^2+bx+c

Los trinomios de esta forma presentan como característica que el coeficiente del primer término es diferente de 1.

Para factorizar estos trinomios existen varias formas: por inspección, utilizando la ecuación general o de la siguiente forma:

Ejemplo: Factorizar $15x^2 - 23x + 4$

$$\frac{15(15x^2 - 23x + 4)}{15}$$

Se multiplica y se divide el trinomio por el coeficiente del primer término.

$$\frac{(15x)^2 - 23(15x) + 60}{15}$$

Se aplica la propiedad distributiva, dejando indicado el término del medio.

$$\frac{(15x-20)(15x-3)}{15}$$

Se factoriza como el trinomio de la forma x^2+bx+c

$$\frac{5(3x-4)3(5x-1)}{5 \cdot 3}$$

Factor común a los dos binomios y se descompone el denominador en factores

primos

$$= (3x-4)(5x-1)$$

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
46) $4x^2 + 8x + 3$	$(2x+1)(2x+3)$	47) $2x^2 + 5x + 3$	$(x+1)(2x+3)$
49) $6x^2 + 5x - 4$	$(2x-1)(3x+4)$	48) $6x^2 + 7x + 2$	$(2x+1)(3x+2)$
50) $6x^2 + 17x + 12$	$(3x+4)(2x+3)$	51) $3y^2 + 8y + 5$	$(x+1)(3x+5)$
52) $13x^2 - 7x - 6$	$(x-1)(13x+6)$	53) $21m^2 + 11m - 2$	$(7x-1)(3x+2)$
54) $7x^2 - 15x + 2$	$(x-2)(7x-1)$	55) $2x^2 + 5x - 12$	$(2x-3)(x+4)$
56) $8x^2 - 14x + 3$	$(2x-3)(4x-1)$	57) $7p^2 + 13p - 2$	$(7x-1)(x+2)$
58) $2x^2 + 5x + 3$	$(x+1)(2x+3)$	59) $6x^2 - 5x - 6$	$(2x-3)(3x+2)$
60) $30p^2 + 17pq - 21q^2$	$(5x-3)(6x+7)$		

Factorización de Trinomio cuadrado perfecto:

1. Ordenar el Trinomio.
2. El 1^{ro} y 3^{er} término deben ser positivos y tener cuadrados perfectos.
3. El 2^{do} término debe ser el doble producto de las raíces de los extremos.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Ejemplo: Factorizar $x^4 - 4x^2 + 4$

$$\sqrt{x^4} = x^2 \quad \sqrt{4} = 2 \quad \text{Se escribe con el signo de la mitad} \quad \boxed{(x^2 - 2)^2}$$

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
61) $g^2 + 2gh + h^2$	$(g + h)^2$	62) $225 - 30b + b^2$	$(15 - b)^2$
63) $x^2 + 2xy + y^2$	$(x + y)^2$	64) $a^2 - 2a + 1$	$(a - 1)^2$
65) $m^2 - 6m + 9$	$(m - 3)^2$	66) $9x^2 - 12xy + 4y^2$	$(3x - 2y)^2$
67) $4a^2 + 4ab + b^2$	$(2a + b)^2$	68) $36n^2 + 84pn + 49p^2$	$(6n + 7p)^2$
69) $x^2 - 10x + 25$	$(x - 5)^2$	70) $49x^2 - 14x + 1$	$(7x - 1)^2$
71) $4x^2 - 4x + 1$	$(2x - 1)^2$	72) $25m^2 - 70mn + 49n^2$	$(5m - 7n)^2$
73) $289x^2 + 68xyz + 4y^2z^2$	$(17x + 2yz)^2$	74) $-x^2 + 2x - 1$	$(x - 1)^2$
75) $1 + 49x^4y^2 + 14x^2y$	$(1 + 7x^2y)^2$		

Factorización de Diferencia de cuadrados $x^2 - y^2$:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Ejemplo: Factorizar $x^2 - 36$

$$\sqrt{x^2} = x \quad \sqrt{36} = 6 \quad \text{Se escriben dos paréntesis con signos contrarios}$$

$$\boxed{(x + 6)(x - 6)}$$

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
76) $x^2 - 25$	$(x+5)(x-5)$	77) $y^2 - m^2$	$(y+m)(y-m)$
78) $4x^2 - 1$	$(2x+1)(2x-1)$	79) $9x^2 - 16$	$(3x+4)(3x-4)$
80) $16a^2 - 100$	$(4a+10)(4a-10)$	81) $36m^2n^2 - 25$	$(6mn+5)(6mn-5)$
82) $169m^2 - 196n^2$	$(13m+14n)(13m-14n)$	83) $9p^2 - 64$	$(3p+8)(3p-8)$
84) $p^2 - 3$	$(p+\sqrt{3})(p-\sqrt{3})$	85) $8y^2 - 18$	$(2\sqrt{2}y+3\sqrt{2})(2\sqrt{2}y-3\sqrt{2})$
86) $x^6 - 5y^4$	$(x^3+\sqrt{5}y^2)(x^3-\sqrt{5}y^2)$	87) $x^{16} - y^{116}$	$(x^8+y^{58})(x^8-y^{58})$
88) $121x^2 - 144k^2$	$(11x+12k)(11x-12k)$	89) $\frac{1}{25}y^4 - \frac{9}{64}x^4$	$\left(\frac{1}{5}y^2 + \frac{3}{8}x^2\right)\left(\frac{1}{5}y^2 - \frac{3}{8}x^2\right)$
90) $\frac{144}{81}x^2 - \frac{25}{64}a^2$	$\left(\frac{1}{5}y^2 + \frac{3}{8}x^2\right)\left(\frac{1}{5}y^2 - \frac{3}{8}x^2\right)$		

Factorización de Suma o Diferencia de cubos $x^3 - y^3$, $x^3 + y^3$

Diferencia de cubos $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

Se extrae la raíz cúbica de ambos términos, luego se escriben dos paréntesis, el primero con la resta de las raíces y el segundo en la forma siguiente: la primer raíz al cuadrado más el producto de las dos raíces más el cuadrado de la segunda raíz, como lo indica el ejemplo

Ejemplo: Factorizar $x^3 - 2^3$

$$x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

Suma de cubos $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

Igual que la diferencia, sólo se cambian algunos signos

Ejemplo: Factorizar $x^3 + 2^3$

$$x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
91) $x^3 - 64$	$(x-4)(x^2+4x+16)$	92) $x^3 - y^3$	$(x-y)(x^2+xy+y^2)$
93) $8a^3b^3 + 27$	$(2ab+3)(4a^2b^2-6ab+9)$	94) $27m^3 + n^3$	$(3m+n)(9m^2-3mn+n^2)$
95) $64a^3 - 125$	$(4a-5)(16a^2+20a+25)$	96) $m^3n^3 + 125$	$(mn+5)(m^2n^2-5mn+25)$
97) $1728m^3 - 216$	$(12m-6)(144m^2+72m+36)$	98) $x^6 - y^6$	$(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$
99) $p^3 - 9$	$(p-\sqrt[3]{9})(p^2+\sqrt[3]{9}p+3\sqrt[3]{3})$	100) $8y^3 + 216$	$(2y+6)(4y^2-12y+36)$
101) $y^3 + 125x^3$	$(y+5x)(y^2+5xy+25x^2)$	102) $27a^3 + 64p^3$	$(3a+4p)(9a^2-12ap+16p^2)$
103) $a^3b^3 + 343$	$(ab+7)(a^2b^2+7ab+49)$	104) $512z^3 - 27$	$(8z-3)(64z^2+24z+9)$
105) $t^3 - 729s^3$	$(t-9s)(t^2+9ts+81s^2)$		

Ajustar el trinomio cuadrado perfecto:

Ejemplo: Ajustar el trinomio $x^2 - 2x - 8$ a TCP

$$x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 - 8$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 - 8 = (x-1)^2 - 9$$

Ajustar las expresiones algebraicas a trinomio cuadrado perfecto y factorizar

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
106) $x^2 + 6x - 5$	$(x+3)^2 - 14$	107) $a^2 - 66a + 1080$	$(a-33)^2 - 9$
108) $x^2 + 54x + 648$	$(x+27)^2 - 81$	109) $m^2 - 8m - 3$	$(m-4)^2 - 19$
110) $n^2 + 16n + 50$	$(n+8)^2 - 14$	111) $m^2 - 8m + 14$	$(x+4)^2 - 2$
112) $x^2 + 12x + 30$	$(x+6)^2 - 6$	113) $p^2 - 6p - 2$	$(p-3)^2 - 11$
114) $y^2 - 4y + 6$	$(x-2)^2 + 2$	115) $y^2 - 18y + 74$	$(y-9)^2 - 7$

116) $x^2 - 20x + 80$	$(x-10)^2 - 20$	117) $x^2 + 6x - 1$	$(x+3)^2 - 10$
118) $y^2 - 18y + 3$	$(y-9)^2 - 78$	119) $x^2 - 6x + 5$	$(x-3)^2 - 4$
120) $x^2 - 8x - 2$	$(x+4)^2 - 18$		

Factorizar completamente las siguientes expresiones

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
121) $x^3 - 4x^2 + 4x$	$x(x-2)^2$	122) $x^4 - 4$	$(x^2 + 2)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$
123) $x^3 - 4x^2 - 165x$	$x(x-15)(x+11)$	124) $x^3 - 6x$	$x(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})$
125) $25x^3 + 4x$	$x(25x^2 + 4)$	126) $x^4 - 64x$	$x(x-4)(x^2 + 4x + 16)$
127) $(x+3)^2 - 1$	$(x+2)(x+4)$	128) $x^5 y^2 - xy^6$	$xy^2(x^2 + y^2)(x+y)(x-y)$
129) $2x^4 - 8x^2$	$2x^2(x+2)(x-2)$	130) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} - 120x^{-1/2}$	$3x^{-1/2}(x-8)(x+5)$
131) $(2+x)^{-2/3}x + (2+x)^{1/3}$	$2(x+1)(2+x)^{-2/3}$	132) $2x^{1/3}(x-2)^{2/3} - 5x^{4/3}(x-2)^{-1/3}$	$-(3x-4)x^{1/3}(x-2)^{1/3}$
133) $x^{-3/2} + 2x^{-1/2} + x^{1/2}$	$x^{-3/2}(1+x)^2$	134) $(x^2 + 1)^{1/2} + 2(x^2 + 1)^{-1/2}$	$(x^2 + 3)(x^2 + 1)^{-1/2}$
135) $x^{5/2} - x^{1/2}$	$x^{1/2}(x-1)(x+1)$		