

EXPRESIONES RACIONALES

Una expresión racional es el cociente de dos polinomios. Ejemplo:

$$\frac{5x}{x^2 - 1}$$

$$\frac{x^3 - 2x}{x^2 - 5x + 8}$$

$$\frac{\sqrt{x} - 9}{x + 5}$$

Dominio de una expresión algebraica

Una expresión algebraica puede no estar definida en todos los valores de la variable. El conjunto de los números reales que puede tener la variable se denomina **el dominio**

Determinar el dominio de las siguientes expresiones

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $-x^2 - 6x - 3$	$(-\infty, \infty)$	2) $x^2 + 5x - 3$	$(-\infty, \infty)$
3) $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$	$R - \{-1\}$	4) $\frac{3x - 5}{x + 2}$	$R - \{-2\}$
5) $\frac{y^2 - 5y - 3}{2y^2 + 5y + 3}$	$R - \left\{-1, -\frac{3}{2}\right\}$	6) $\frac{3x^2 + 4x - 3}{2x^2 - 7x + 6}$	$R - \left\{2, \frac{3}{2}\right\}$
7) $\frac{5x}{x^2 + 1}$	$(-\infty, \infty)$	8) $\frac{2t}{3t - 2}$	$R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$
9) $\frac{5x}{x^2 - 1}$	$R - \{-1, 1\}$	10) $\frac{5x}{x^3 - 1}$	$R - \{1\}$
11) $\sqrt{x + 2}$	$[-2, \infty)$	12) $\sqrt{x - 5}$	$[5, \infty)$
13) $\frac{1}{\sqrt{x + 2}}$	$(-2, \infty)$	14) $\frac{1}{\sqrt{x - 5}}$	$(5, \infty)$
15) $\sqrt{x^2 - 4}$	$(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$	16) $\sqrt{4 - x^2}$	$[-2, 2]$
17) $\frac{x}{\sqrt[4]{9 - x^2}}$	$(-3, 3)$	18) $\frac{t}{\sqrt[3]{t + 1}}$	$R - \{-1\}$
19) $\sqrt{x^2 + 10x + 25}$	$(-\infty, \infty)$	20) $\sqrt{x^2 - 3x - 28}$	$(-\infty, -4] \cup [7, \infty)$
21) $\sqrt{x^2 - 2x - 8}$	$(-\infty, -2] \cup [4, \infty)$	22) $\frac{\sqrt{x}}{2x^2 + x - 1}$	$[0, \infty) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Simplificación de expresiones racionales

La simplificación de expresiones racionales se realiza utilizando la siguiente propiedad $\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$

Simplificar las siguientes expresiones racionales

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$	$x + 1$	2) $\frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 6x - 16}$	$\frac{2x - 1}{x - 8}$
3) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12}$	$\frac{x + 2}{x - 4}$	4) $\frac{2x - 3}{4x^2 - 9}$	$\frac{1}{2x + 3}$
5) $\frac{(1+x)^2 - 1}{x}$	$2 + x$	6) $\frac{3x - 1}{3x^2 + 5x - 2}$	$\frac{1}{x + 2}$
7) $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$	$2x + h$	8) $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$	$\frac{x + 3}{x - 2}$
9) $\frac{h^3 - 8}{h^2 - 4}$	$\frac{h^2 + 2h + 4}{h + 2}$	10) $\frac{r^2 - r}{2r^2 + 5r - 7}$	$\frac{r}{2r + 7}$
11) $\frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$	$2x + 1$	12) $\frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$	$\frac{(x^2 + 4)(x + 2)}{x^2 + 2x + 4}$
13) $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 15}$	$\frac{x - 3}{x - 5}$	14) $\frac{3x^3 - 12x}{x^2 - 4x + 4}$	$\frac{3x(x + 2)}{x - 2}$
15) $\frac{x^2 + 5}{x^4 - 25}$	$\frac{1}{x^2 - 5}$	16) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{3a + 3b}$	$\frac{a + b}{3}$
17) $\frac{m^2 - n^2}{m^2 + 2mn + n^2}$	$\frac{m - n}{m + n}$	18) $\frac{x^3 + 3x^2 - 10x}{x^3 - 4x^2 + 4x}$	$\frac{x + 5}{x - 2}$
19) $\frac{x^4 - 1}{3x^2 - 3}$	$\frac{x^2 + 1}{3}$	20) $\frac{m^3 - n^3}{5m^2 + 5mn + 5n^2}$	$\frac{m - n}{5}$
21) $\frac{9x^2 + 30x + 25}{6x + 10}$	$\frac{3x + 5}{2}$	22) $\frac{ac - ad + bc - bd}{2c + 3bc - 2d - 3bd}$	$\frac{a + b}{2 + 3b}$
23) $\frac{16x^2y - 25y}{4x^2y - 3xy - 10y}$	$\frac{4x - 5}{x - 2}$	24) $\frac{xy - x + 6y - 6}{xy + x + 6y + 6}$	$\frac{y - 1}{y + 1}$

Multiplicación y división de expresiones racionales

Realizar las siguientes operaciones

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $\frac{2xy^4}{3a^3b} \cdot \frac{5x^3y}{7ab^4}$	$\frac{10x^4y^5}{21a^4b^5}$	2) $\frac{a^5b^8c^7}{a^4b^6c^{10}} \div \frac{a^6b^8c^9}{a^3b^2c^5}$	$\frac{1}{a^2b^4c^2}$
3) $\frac{x^2y^3}{(a^3b^4)^5} \cdot \frac{(a^2b^3)^4}{(x^2y)^5}$	$\frac{1}{x^8y^2a^7b^8}$	4) $\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6}$	$\frac{x+3}{(x-2)(x+1)}$
5) $\frac{-x^3y^4}{x^4y^5} \cdot \frac{x^7y^8}{-x^{15}y^3}$	$\frac{y^4}{x^9}$	6) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+8x+16} \cdot \frac{3x+12}{x-1}$	$\frac{3(x+3)}{x+4}$
7) $\frac{4x}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{16x}$	$\frac{1}{4(x-2)}$	8) $\frac{t^2+7t+12}{t^2+3t+2} \cdot \frac{t^2+5t+6}{t^2+6t+9}$	$\frac{t+4}{t+1}$
9) $\frac{35a^3}{18b^3} \div \frac{14ab^2}{9b^3}$	$\frac{5a^2}{4b^2}$	10) $\frac{a^2+9a+18}{a^2+8a+15} \cdot \frac{a^2+7a+10}{a^2+11a+18}$	$\frac{a+6}{a+9}$
11) $\frac{x^2-25}{x^2-16} \cdot \frac{x+4}{x+5}$	$\frac{x-5}{x-4}$	12) $\frac{z^2-10z+16}{z^2-9z+14} \cdot \frac{z^2-10z+21}{z^2+2z-15}$	$\frac{z-8}{z+5}$
13) $\frac{6x^2+9xy}{a^3} \div \frac{14x^3+21x^2y}{a}$	$\frac{3}{7a^2x}$	14) $\frac{2x^2+3x+1}{x^2+2x-15} \div \frac{x^2+6x+5}{2x^2-7x+3}$	$\frac{(2x+1)(2x-1)}{(x+5)^2}$
15) $\frac{x^3}{x+1} \div \frac{x}{x^2+2x+1}$	$x(x+1)$	16) $\frac{4y^2-9}{2y^2+9y-18} \div \frac{2y^2+y-3}{y^2+5y-6}$	1
17) $\frac{a^3+a}{a^2-a} \div \frac{a^3-a^2}{a^2-2a+1}$	$\frac{a^2+1}{a^2}$	18) $\frac{m^2+8m+16}{m^2+2m-8} \div \frac{m^2-2m-3}{m^2-3m+2}$	$\frac{(m+4)(m-1)}{(m-3)(m+1)}$
19) $\frac{x^3-x}{x+1} \div \frac{x-1}{x+1}$	$x(x+1)$	20) $\frac{m^2-3m+2}{m^2-5m+4} \div \frac{m^2+6m-16}{m^2+m-20}$	$\frac{m+5}{m+8}$
21) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3} \cdot \frac{3-x}{3+x}$	$\frac{-(x-1)}{x+1}$	22) $\frac{x^4-y^4}{x^2+2xy+y^2} \div \frac{x^2+y^2}{x^2+2xy+y^2}$	$(x+y)(x-y)$
23) $\frac{y-3}{y^2+9} \cdot \frac{y+3}{y^2-9}$	$\frac{1}{y^2+9}$	24) $\frac{2x^2-3x-2}{x^2-1} \div \frac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}$	$\frac{x-2}{x+1}$
25) $\frac{x^2-x-12}{x^2-9} \cdot \frac{3+x}{4-x}$	$\frac{-(x+3)}{x-3}$	26) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{2x^2-xy-y^2}{x^2-xy-2y^2}$	$\frac{2x+y}{x-2y}$

Adición y sustracción de expresiones racionales

Realizar la operación y simplificar

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $\frac{x+3}{x+2} + \frac{2x+3}{x+2}$	3	2) $\frac{5x+1}{x+1} - \frac{2x-4}{x+1}$	$\frac{3x+5}{x+1}$
3) $2 + \frac{x}{x+3}$	$\frac{3(x+2)}{x+3}$	4) $\frac{2x-1}{x+4} - 1$	$\frac{x-5}{x+4}$
5) $\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2}$	$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2)}$	6) $\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x-3}$	$\frac{x^2-x+4}{(x+2)(x-3)}$
7) $\frac{1}{x+5} - \frac{2}{x-3}$	$\frac{-x-13}{(x+5)(x-3)}$	8) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$	$\frac{1}{(x+1)(x+2)}$
9) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$	$\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$	10) $\frac{x}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1}$	$\frac{3x+2}{(x+1)^2}$
11) $\frac{x}{x^2-4} + \frac{3}{x+2}$	$\frac{4x-6}{(x-2)(x+2)}$	12) $\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{(x+1)^2}$	$\frac{-x+3}{(x-1)(x+1)^2}$
13) $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2-9}$	$\frac{x-2}{(x+3)(x-3)}$	14) $x+1 + \frac{x}{x+1}$	$\frac{x^2+3x+1}{x+1}$
15) $\frac{5}{2x-3} - \frac{3}{(2x-3)^2}$	$\frac{10x-18}{(2x-3)^2}$	16) $\frac{x}{x^2-x-6} - \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-3}$	$\frac{-2x-1}{(x+2)(x-3)}$
17) $\frac{x+10}{x^2-4} - \frac{x+4}{x^2+4x+4}$	$\frac{10x+28}{(x-2)(x+2)^2}$	18) $\frac{12x-4}{x^2-4x+4} - \frac{2}{x-2}$	$\frac{10x}{(x-2)^2}$
19) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$	$\frac{x^2+x+1}{x^3}$	20) $\frac{2}{x^2} - \frac{3}{xy} + \frac{4}{y^2}$	$\frac{2y^2-3xy+4x^2}{x^2y^2}$
21) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+x}$	$\frac{2x+1}{x^2(x+1)}$	22) $\frac{1}{x^2+3x+2} - \frac{1}{x^2-2x-3}$	$\frac{-5}{(x+2)(x-3)(x+1)}$
23) $\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x^2+7x+12}$	$\frac{2x+7}{(x+4)(x+3)}$	24) $\frac{x}{x^2+x-2} - \frac{2}{x^2-5x+4}$	$\frac{x^2-4x-2}{(x+2)(x-3)(x+1)}$
25) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{4}{x^2-x}$	$\frac{5x-6}{x(x-1)}$	26) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{x^2-1}$	$\frac{x^2+x+4}{(x+1)^2(x-1)}$

FRACCIONES COMPUESTAS

Una fracción compuesta es aquella en que el numerador, el denominador, o ambos son expresiones fraccionarias.

Simplificar las siguientes fracciones compuestas

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x+1}}$		2) $x - \frac{y}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}$	
3) $\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}$		4) $\frac{\frac{x}{y} + 1}{1 - \frac{y}{x}}$	
5) $\frac{1 + \frac{1}{c-1}}{1 - \frac{1}{c-1}}$		6) $\frac{\frac{5}{x-1} - \frac{2}{x+1}}{\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1}}$	
7) $\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h}$		8) $\frac{1}{1+a^n} + \frac{1}{1+a^{-n}}$	
9) $\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}}$		10) $\frac{x^{-1} + y^{-1}}{(x+y)^{-1}}$	
11) $\frac{\frac{a-b}{a} - \frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b} + \frac{a+b}{a}}$		12) $\frac{\left(a + \frac{1}{b}\right)^m \left(a - \frac{1}{b}\right)^n}{\left(b + \frac{1}{a}\right)^m \left(b - \frac{1}{a}\right)^n}$	

61–66 ■ Simplifique la expresión fraccionaria. (Expresiones como éstas se utilizan en el cálculo infinitesimal.)

$$61. \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h}$$

$$62. \frac{(x+h)^{-3} - x^{-3}}{h}$$

$$63. \frac{\frac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \frac{1-x}{2+x}}{h}$$

$$64. \frac{(x+h)^3 - 7(x+h) - (x^3 - 7x)}{h}$$

$$65. \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \quad 66. \sqrt{1 + \left(x^3 - \frac{1}{4x^3}\right)^2}$$

67–72 ■ Simplifique la expresión. (Este tipo de expresión se utiliza en el cálculo infinitesimal cuando se aplica la “regla del cociente”.)

$$67. \frac{3(x+2)^2(x-3)^2 - (x+2)^3(2)(x-3)}{(x-3)^4}$$

$$68. \frac{2x(x+6)^4 - x^2(4)(x+6)^3}{(x+6)^8}$$

$$69. \frac{2(1+x)^{1/2} - x(1+x)^{-1/2}}{x+1}$$

$$70. \frac{(1-x^2)^{1/2} + x^2(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2}$$

$$71. \frac{3(1+x)^{1/3} - x(1+x)^{-2/3}}{(1+x)^{2/3}}$$

$$72. \frac{(7-3x)^{1/2} + \frac{3}{2}x(7-3x)^{-1/2}}{7-3x}$$

Racionalización del denominador o del numerador

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$$

Racionalice el denominador

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

$$\frac{2}{3-\sqrt{5}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\frac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}$$

$$\frac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

Racionalice el numerador

$$\frac{1-\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{r}+\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$$

$$\sqrt{x^2+1}-x$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

Racionalizar el numerador

$$\frac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

Racionalizar

$$1) \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

$$2) \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$$

$$3) \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$4) \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

$$5) \frac{x-81}{\sqrt{x}-9}$$

$$6) \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$$

$$7) \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$8) \frac{k^2-16}{\sqrt{k}-2}$$

$$9) \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$$

$$10) \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$$

$$11) \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \quad 12)$$

$$\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x}$$

$$13) \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$$

$$14) \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$$

$$15) \frac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}$$

$$16) \frac{3-\sqrt{2x-1}}{3(\sqrt{5x}-5)}$$

$$17) \frac{3-\sqrt{2x-1}}{3(\sqrt{5x}-5)}$$

$$18) \frac{x^3-8}{\sqrt[3]{x-2}}$$

$$19) \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$$

$$20) \frac{3(\sqrt{x+2}-2)}{4(8-\sqrt{32x})}$$

Expresiones algebraicas fraccionarias – Ejercicios

$$a) \frac{x-2}{4} + \frac{3x+2}{6} = \quad b) \frac{2}{5a^2} + \frac{1}{3ab} = \quad c) \frac{a-2b}{15a} + \frac{b-a}{20b} = \quad d) \frac{2a-3}{3a} + \frac{3x+2}{10x} + \frac{x-a}{5ax} =$$

$$e) \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} = \quad f) \frac{m+3}{m-3} + \frac{m+2}{m-2} = \quad g) \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} = \quad h) \frac{m-n}{m+n} - \frac{m+n}{m-n} =$$

$$i) \frac{2a+3}{4a} - \frac{a-2}{8a} = \quad j) \frac{4a^2}{5b^3} \cdot \frac{6a}{8b} \cdot \frac{15b^2}{2a^4} = \quad k) \frac{5x+25}{14} \cdot \frac{7x+7}{10x+50} = \quad l) \frac{m+n}{mn-n^2} \cdot \frac{n^2}{m^2-n^2} =$$

$$m) \frac{1-x}{a+1} \cdot \frac{a^2+a}{x-x^2} \cdot \frac{x^2}{a} = \quad n) \frac{x^2}{3y^2} : \frac{2x}{y^3} = \quad ñ) \frac{3a^2b}{5x^2} : a^2b^3 = \quad o) \frac{x-1}{3} : \frac{2x-2}{6} =$$

$$p) \frac{x^3-x}{2x^2+6x} : \frac{5x^2-5x}{2x+6} = \quad q) \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \quad r) \frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} =$$

Racionalizar las siguientes expresiones:

$$a) \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} =$$

$$b) \frac{m}{\sqrt[3]{b}} =$$

$$c) \frac{2\sqrt{a^3}}{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} =$$

$$d) \frac{2}{2-\sqrt{2}} =$$

$$e) \frac{m \cdot n}{\sqrt{2a-c}} =$$

$$f) \frac{a}{3a\sqrt{2}+a} =$$

$$g) \frac{\sqrt{2a}-\sqrt{3b}}{2a-3b} =$$

$$h) \frac{x+x\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{xy}} =$$

$$i) \frac{\frac{1}{5}\sqrt{2}}{\sqrt{72}} =$$

$$j) \frac{x}{2\sqrt[5]{m}} =$$

$$k) \frac{a}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} =$$

$$l) \frac{2a+3b}{\sqrt{2a}-\sqrt{3b}} =$$

$$m) \frac{\sqrt{y}-\sqrt{z}}{\sqrt{xy}-\sqrt{xz}} =$$