RESUMEN DE CRITERIOS SOBRE CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA DE SERIES INFINITAS

A fin de adquirir destreza en el reconocimiento y aplicación del criterio apropiado, se requiere de práctica considerable, la cual se obtendrá realizando los ejercicios de la guía respectiva. Como ayuda, se listan a continuación los criterios y se aconseja que sean aplicados en el orden indicado. Si un paso en particular no es aplicable o no puede inferirse ninguna conclusión, continúe con el siguiente. En ocasiones pueden aplicarse más de un criterio, sin embargo, es importante que elija el más eficaz.

1.– Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)\neq 0$, entonces la serie diverge. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=0$, no puede inferirse ninguna conclusión.

2.- Examine la serie a fin de determinar si corresponde a uno de los siguientes tipos especiales:

(i) Una serie geométrica: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a.r^{n-1}$. Converge a la suma $\dfrac{a}{1-r}$ $si\ |r|<1$; diverge si $|r|\geq 1$.

(ii) Una serie p: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$ (donde p es una constante). Converge si p>1; diverge si p ≤ 1.

(iii) Una serie alternante: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}.a_n$ ó $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}.a_n$ Si $a_n>0$, y $a_{n+1}<a_n$ para todos los números enteros positivos n, y si $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$, entonces la serie alternante es convergente.

3.– Aplique el criterio de la razón, Sea $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ una serie infinita para la cual u_n es diferente de cero:

(i) si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=L<1$, la serie es absolutamente convergente;

(ii) si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=L>1$, o si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=+\infty$, la serie es divergente;

(iii) si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$, nada se puede inferir acerca de la convergencia a partir de este criterio.

4.- Aplique el criterio de la raíz: Sea $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ una serie infinita para la cual cada U_n es diferente de cero:

(i) si $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=L<1$, la serie es absolutamente convergente;

(ii) si $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=L>1$, o si $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=+\infty$ la serie es divergente;

(iii) si $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=1$, nada se puede inferir acerca de la convergencia a partir de este criterio.

5.- Aplique el criterio de la integral: Sea f una función que es continua, decreciente y de valores positivos para toda $x\geq 1$. Entonces la serie infinita $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)+\ldots$ es convergente si la integral impropia $\int_1^{+\infty}f(x).dx$ existe, y es divergente si $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^{b}f(x).dx=+\infty$.

6.- Aplique el criterio de comparación: Sea la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ una serie de términos positivos.

(i) Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ es una serie de términos positivos de la cual se sabe que converge, y si $U_n\leq V_n$ para todo número entero positivo n, entonces $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ es convergente.

(ii) Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}w_n$ es una serie de términos positivos de la cual se sabe que diverge, y si $U_n\geq W_n$ para todo número entero positivo n, entonces $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ es divergente.

o aplique el criterio de compración por paso al límite: Sean $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ dos series de términos positivos.

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=c>0$, entonces las dos series son convergentes o ambas series son divergentes.

(ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$ y si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ converge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ converge.

(iii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$ y si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ diverge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ diverge.

Adaptado por: Prof. José Gregorio Páez Veracierta Fuente: Luois Leithold, Cálculo con Geometría Analítica, 7ma. Edición.