ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Ejemplo:

$$3x+2=5x \qquad x^2-2x=10 \qquad 5=\sqrt{x}$$

El objetivo es determinar el valor de la incógnita (Variable) x para la cual se cumple la igualdad. Los valores de la incógnita que hacen que la ecuación sea verdadera se llaman raíces o soluciones de la ecuación y el proceso para hallarlas se denomina solución de una ecuación.

Ecuaciones lineales.

Son ecuaciones de primer grado de la forma $ax+b=0$ donde a y b son números reales y x es la incógnita.

Ejemplo: Solución de una ecuación lineal: Resolver la ecuación $5x+8=x$

La ecuación se resuelve agrupando los términos con la incógnita a un lado y los coeficientes al otro lado de la igualdad mediante transposición de términos.

$5x+8=x$	
$5x+8-8=x-8$	Axioma de igualdad
$5x=x-8$	Agrupación de términos semejantes
$5x-x=x-8-x$	Axioma de igualdad
$4x=-8$	Agrupación de términos semejantes
$\frac{4x}{4}=-\frac{8}{4}$	Axioma de igualdad
$x=-2$	Simplificando

Para comprobar la solución, se reemplaza el valor de la incógnita en la ecuación original.

$$5(-2)+8=(-2)$$
$$-10+8=-2$$
$$-2=-2$$

Como la ecuación es verdadera la raíz o solución de la ecuación es: $\boxed{x=-2}$

Hallar el valor de la incógnita para las siguientes ecuaciones.

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $7x+2=5x-2$	$x=-2$	2) $x-3=5x+6$	$x=-\frac{9}{4}$	3) $3x+8=29$	$x=7$
4) $5=2x+6$	$x=-\frac{1}{2}$	5) $5y+4=6y+4$	$y=0$	6) $3m+2=4m-2$	$m=4$
7) $2l+32=5l+32$	$l=0$	8) $3z+5=5z+12$	$z=-\frac{7}{2}$	9) $\sqrt{x}=4$	$x=16$
10) $\sqrt{x}+5=8$	$x=9$	11) $7t-2t=6+1$	$t=\frac{7}{5}$	12) $2(x+1)=6x$	$x=\frac{1}{2}$
13) $3x+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}x-5$	$x=-\frac{34}{15}$	14) $x+\frac{5}{2}x=\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{7}$	15) $5x+9=\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}$	$x=-\frac{123}{65}$
16) $\frac{2}{5}x-\frac{6}{5}=-x+\frac{1}{6}$	$x=\frac{41}{42}$	17) $\frac{2}{x}+5=\frac{2}{3}$	$x=-\frac{6}{13}$	18) $\frac{1}{x}=\frac{4}{3x}+1$	$x=-\frac{1}{3}$
19) $3+\frac{2}{x}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4x}$	$x=-\frac{2}{3}$	20) $\frac{3}{x}=\frac{5}{4}-\frac{3}{4x}$	$x=3$	21) $\frac{3}{x+1}=2$	$x=\frac{1}{2}$
22) $\frac{2}{x-1}=\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{4}$	$x=7$	23) $\frac{t}{4}=\frac{2}{5}t+6$	$t=-40$	24) $\frac{3x+2}{x-7}=\frac{3}{4}$	$x=-\frac{29}{9}$

Ecuaciones cuadráticas.

Son ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$ donde a y b son números reales y $a \neq 0$.
La mayoría de las ecuaciones cuadráticas se pueden resolver mediante factorización.

Propiedad del producto nulo.
$AB=0 \quad \Leftrightarrow \quad A=0 \ \wedge \ B=0$

Ejemplo: Solución de una ecuación cuadrática. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $x^2+3x=-2$
b) $x^2-25=0$

a) $x^2+3x+2=0$		Igualando a cero
$(x+1)(x+2)=0$		Factorizando
$(x+1)=0$	$(x+2)=0$	Propiedad del producto nulo
$\boxed{x=-1}$	$\boxed{x=-2}$	Solución

b) $x^2-25=0$		
$x^2=25$		Despejando la incógnita
$\sqrt{x^2}=\pm\sqrt{25}$		Axioma de igualdad
$\boxed{x=-5}$	$\boxed{x=5}$	Solución

El discriminante.
El discriminante de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ es $D=b^2-4ac$

1) Si $b^2-4ac>0$ la ecuación tiene dos soluciones reales distintas
2) Si $b^2-4ac=0$ la ecuación tiene exactamente una solución real
3) Si $b^2-4ac<0$ la ecuación no tiene solución real

Ejemplo: Utilice el discriminante para determinar cuántas soluciones reales tienen las siguientes ecuaciones.

a) $x^2+3x+2=0$
b) $4x^2+12x+9=0$
c) $x^2+x+1=0$

a) El discrimínate es $3^2-4(1)(2)>0$ entonces la ecuación tiene dos raíces distintas.
b) El discrimínate es $12^2-4(4)(9)=0$ entonces la ecuación tiene una raíz.
c) El discrimínate es $1^2-4(1)(1)<0$ entonces la ecuación no tiene solución real.

Encuentre las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $x^2+2x-5=0$	$x=-1\pm\sqrt{6}$	2) $x^2-4x+2=0$	$x=2\pm\sqrt{2}$
3) $2x^2+8x+1=0$	$x=-4\pm\sqrt{14}$	4) $9x^2+6x+10=0$	No tiene solución real
5) $2x^2+5x-12=0$	$x=3/2 \ \wedge \ x=-4$	6) $3y^2+6y-9=0$	$y=1 \ \wedge \ y=-3$
7) $9x^2-4=0$	$x=\pm 2/3$	8) $m^2+8m=48$	$m=4 \ \wedge \ m=-12$
9) $y^2+6y=16$	$y=2 \ \wedge \ y=-8$	10) $2x^2+3x-5=0$	$x=1 \ \wedge \ x=-5/2$
11) $-5x^2+13x+6=0$	$x=3 \ \wedge \ x=-2/5$	12) $6x-x^2=9$	$x=3$

13) $7x^2+7x-84=0$	$x=3 \ \wedge \ x=-4$	14) $7x^2+21x-28=0$	$x=1 \ \wedge \ x=-4$
15) $-x^2+4x-7=0$	No tiene solución real	16) $12x^2-3x=0$	$x=0 \ \wedge \ x=\frac{1}{4}$
17) $4x^2-16=0$	$x=\pm 2$	18) $\frac{3}{x}=1+\frac{x-13}{6}$	$x=\frac{-7\pm 3\sqrt{13}}{-2}$
19) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}=\frac{5}{4}$	$x=2 \ \wedge \ x=-\frac{7}{5}$	20) $\frac{x^2}{x+100}=50$	$x=100 \ \wedge \ x=-50$
21) $x-\frac{4}{x}=3$	$x=4 \ \wedge \ x=-1$	22) $x+\frac{1}{x}=2$	$x=1$
23) $\frac{x}{2x+7}-\frac{x+1}{x+3}=1$	$x=-\frac{7}{3} \ \wedge \ x=-4$	24) $2x=1-\sqrt{2-x}$	$x=1 \ \wedge \ x=-\frac{1}{4}$

Ecuaciones con valor absoluto.

Ejemplo: Solución de una ecuación con valor absoluto. Resolver la siguiente ecuación.

$|2x-5|=3$

Equivale a

$$-3=2x-5=3$$
$$-3+5=2x=3+5$$
$$\frac{2}{2}=x=\frac{8}{2}$$

Solución $\boxed{x=1}$ $\boxed{x=4}$

Encuentre todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones con valor absoluto

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $\lvert 2x\rvert=3$	$x=-\frac{3}{2} \ \wedge \ x=\frac{3}{2}$	2) $\lvert 4x\rvert=2$	$x=-\frac{1}{2} \ \wedge \ x=\frac{1}{2}$
3) $\lvert 8x\rvert=3$	$x=-\frac{3}{8} \ \wedge \ x=\frac{3}{8}$	4) $\lvert 6x+1\rvert=4$	$x=-\frac{5}{6} \ \wedge \ x=\frac{1}{2}$
5) $\lvert 3x+5\rvert=1$	$x=-2 \ \wedge \ x=-\frac{4}{3}$	6) $\lvert x-4\rvert=8$	$x=-4 \ \wedge \ x=12$
7) $\lvert x-6\rvert=-1$	$x=5 \ \wedge \ x=7$	8) $2\lvert x-2\rvert-1=2$	$x=\frac{1}{2} \ \wedge \ x=\frac{7}{2}$
9) $\lvert 2x+1\rvert-3=8$	$x=-6 \ \wedge \ x=5$	10) $\lvert x+2\rvert=7x-10$	$x=1 \ \wedge \ x=2$
11) $\left\lvert\frac{x+1}{2}\right\rvert=3$	$x=-7 \ \wedge \ x=5$	12) $\left\lvert\frac{x}{2}+1\right\rvert=4$	$x=-10 \ \wedge \ x=6$
13) $\left\lvert\frac{x-2}{2}\right\rvert=6$	$x=-10 \ \wedge \ x=14$	14) $\left\lvert\frac{x}{3}\right\rvert=9$	$x=-27 \ \wedge \ x=27$
15) $\left\lvert\frac{x}{2}+3\right\rvert=3$	$x=-12 \ \wedge \ x=0$	16) $\lvert x^2-5\rvert=4$	$x=-1, x=1, x=-3 \ \wedge \ x=3$

Problemas en contexto.

Para resolver, los siguientes problemas, debe traducirlos al lenguaje algebraico y después darle la solución (si es posible) a las ecuaciones obtenidas.

1. Un maratonista está compitiendo en una carrera de 8500m. Sufre una lesión y se retira cuando ha recorrido la cuarta parte de lo que le faltaba por recorrer. ¿Cuántos metros corrió realmente? Rta: 1700 m.

2. Se tienen dos números consecutivos. La suma de 1/5 del mayor y ¼ del menor es 1 menos que 15/33 del mayor ¿Cuáles son los número?

3. La suma de un número y tres veces su recíproco es 52 / 7. ¿Cuál es el número?

4. Siendo 68m el perímetro de un rectángulo y 12,5m uno de sus lados, ¿cuál es la longitud del otro? Rta: 21,5 m.

5. Juan y Pedro son mellizos. Julián tiene 3 años más que ellos y las edades de los tres sumadas es 42. ¿Qué edad tiene Julián? Rta: 16 años.

6. La suma de tres números pares consecutivos es 72. ¿Cuáles son esos números? Rta: 22, 24 y 26.

7. Tengo $66 en billetes de $2 y de $5. Si en total tengo 18 billetes, ¿cuántos billetes de cada valor tengo? Rta: 8 billetes de $2 y 10 de $5.

8. Dos toneles contienen en conjunto 108 litros de vino. Si pasáramos 4 litros de un tonel al otro, éste contendría el doble de vino que el primero. ¿Cuántos litros de vino contiene cada tonel? Rta: 40 y 68 litros.

9. José nació 2 años después que Pablo y 3 años antes que César. ¿Cuántos años tiene cada uno si la suma de sus edades es 17?

   Rta: José 6 años, Pablo 8 años y César 3 años.

10. ¿Cuál es el número natural tal que la mitad del producto por su consecutivo es 105? Rta. 14

11. Tres personas reúnen un pequeño capital de $9500 para establecer un comercio minorista. Si la primera persona aporta 3/5 de lo que aporta la segunda, y la tercera ½ de lo que aporta la primera, ¿a cuánto asciende la contribución de cada uno de ellos? Rta: $3000, $5000 y $1500.

12. Un comerciante quiere preparar 10 kg. de te para venderlo a $15 el kg. Va a utilizar un te de $22 el kg. y otro de $12 el kg. Calculá cuántos kg de cada clase de te debe colocar. Rta: 3kg. del de $22 y 7 kg. del de $12.

13. Encuentra un número de dos cifras que al sumarle 9 se convierte en otro número con las mismas dos cifras en orden invertido. ¿Puedes encontrar otro? ¿Hay más? ¿Cuántos? Rta: todos los números que cumplen esa condición son: 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78 y 89.

14. En un triángulo rectángulo, el cateto menor es igual a 3/5 de la hipotenusa. Esta supera por 3 cm al cateto mayor. ¿Cuál es la medida de cada lado? Rta. 9,12 y 15 cm. (opcional)

15. Un tren, obligado por una nevada, debió marchar a 5 km por hora más lentamente que su velocidad promedio habitual. Llegó a destino con un atraso de 1 hora en su recorrido, de 280 km ¿Cuál fue su velocidad durante la emergencia? Rta. 35 km/h.

16. He pensado un número natural menor que cien; tiene la suma de sus cifras igual a 10. Si se invierten las cifras y al número así formado se le suma 3, resulta otro número 57 unidades mayor que el pensado. ¿Cuál es el número que pensé? Rta. 28.

17. En un rectángulo cuya base es menor que la altura, el perímetro es 17cm y el área es 15 $cm^{2.}$ ¿Cuál es la longitud de la base? Rta. 2,5 cm. (opcional)

18. Viajando en su automóvil, Pablo se desplazó de una ciudad a otra a una velocidad media de 40 km/h. El trayecto de regreso lo realizó a 60 km/h de promedio. ¿Cuál fue la velocidad promedio del viaje completo? Rta. 48 km/h.

19. Daniel y Roberto disfrutaban de un viaje en sus motocicletas cuando, a 100 km de arribar a una ciudad, la moto de Daniel sufrió una ligera avería. Por esta causa debió reducir su velocidad de los 100 km/h que promediaban a 50 km/h. Decidieron que Roberto continuaría su marcha a la velocidad inicial prevista, yendo a la ciudad a comprar el repuesto necesario y retornando hacia el encuentro con Daniel. Suponiendo que no demoró en comprar el repuesto, ¿Cuánto tiempo demoraron en encontrarse? Rta. 1hora 20minutos

20. Guillermo fue a comprar las gaseosas para un cumpleaños. Disponía para esto de $18. Se encontró con que cada una costaba 30 centavos más de lo esperado y por eso el dinero le alcanzó para 3 botellas menos de las planeadas. ¿Cuántas compró? Rta. 12.

21. José María suma las notas obtenidas en la última prueba de matemática, historia y geografía obteniendo 25. La nota de historia es 2 unidades menor que la de matemática y 1 unidad mayor que la de geografía. ¿Cuál es la nota de cada evaluación? Rta. 10 en matemática, 8 en historia y 7 en geografía?

SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que contiene las mismas variables. La solución son los valores de las variables para los cuales el sistema se cumple. Resolver un sistema es encontrar todas las soluciones del sistema.

Ejemplo2: Resolver el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

$$3x+4y=10$$
$$2x+y=5$$

Este sistema se puede resolver por los métodos de sustitución, igualación o eliminación. Para resolverlo vamos a utilizar los tres métodos.

Método de sustitución.

$y=5-2x$ Despejamos *y* de la segunda ecuación, luego la sustituimos en la primera

$3x+4(5-2x)=10$ Tenemos una ecuación con una variable

$3x+20-8x=10$

$-5x=10-20$ Por agrupación de términos semejantes

$x=\dfrac{-10}{-5}$ Por transposición de términos

$\boxed{x=2}$ Sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones iníciales, obtenemos $\boxed{y=1}$

Método de igualación.

$y=5-2x$ $y=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{4}x$ Despejamos *y* de las dos ecuaciones

$5-2x=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{4}x$ Igualándolas tenemos una ecuación con una variable

$5-\dfrac{5}{2}=2x-\dfrac{3}{4}x$ Variables a un lado y coeficientes al otro

$\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{4}x$ Agrupando términos semejantes

$\boxed{x=2}$ Por transposición de términos $\boxed{y=1}$

Método de eliminación.

$3x+4y=10$

$-4(2x+y=5)$ Multiplicando la segunda ecuación por -4

$$\begin{array}{l} 3x+4y=10 \\ \underline{-8x-4y=-20} \\ -5x \qquad\quad =-10 \end{array}$$

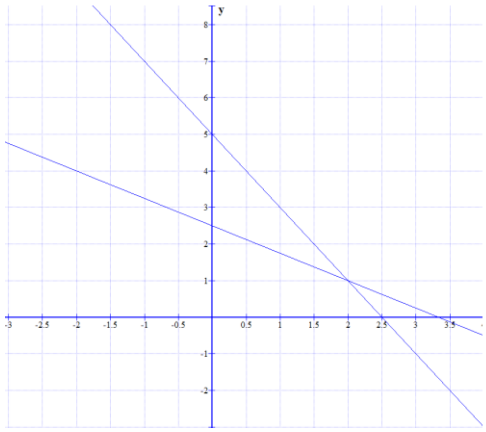
Sumando las dos ecuaciones

$-5x=-10$ Tenemos una ecuación con una variable

$x=\frac{-10}{-5}$ Por transposición de términos

$\boxed{x=2}$ $\boxed{y=1}$

La respuesta se puede escribir como un par ordenado $(2,\quad 1)$ y su gráfica es la siguiente:



SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables es de la forma

$$\begin{cases} a_1x & +b_1y & = & c_1 \\ a_2x & +b_2y & = & c_2 \end{cases}$$

<u>Número de soluciones de los sistemas lineales</u>

Según el número de soluciones, los sistemas se clasifican en

<u>Sistema inconsistente</u> $\Leftrightarrow$ No tiene soluciones

<u>Sistema consistente determinado</u> $\Leftrightarrow$ Tiene solución única

<u>Sistema consistente indeterminado</u> $\Leftrightarrow$ Tiene infinitas soluciones

Resuelva cada sistema o demuestre que no tiene solución. Si tiene infinitas soluciones exprésela en forma de par ordenado utilizando un parámetro.

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1. $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$	$x=3$ $y=1$	2. $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x+2y=2 \end{cases}$	$x=4$ $y=-1$	3. $\begin{cases} x^2+y=9 \\ x-y+3=0 \end{cases}$	$x=-3\quad y=0$ $x=2\quad y=5$
4. $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$	$x=1$ $y=2$	5. $\begin{cases} 4x-3y=11 \\ 8x+4y=12 \end{cases}$	$x=2$ $y=-1$	6. $\begin{cases} x-y=9 \\ x+y=4 \end{cases}$	$x=13/2$ $y=-5/2$
7. $\begin{cases} x+y=4 \\ -x+y=0 \end{cases}$	$x=2$ $y=2$	8. $\begin{cases} x-y=3 \\ x+3y=7 \end{cases}$	$x=4$ $y=1$	9. $\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 4x+3y=9 \end{cases}$	$x=3$ $y=-1$

10. $\begin{cases}3x+2y=0\\-x-2y=8\end{cases}$	$x=4$ $y=-6$	11. $\begin{cases}x+3y=5\\2x-y=3\end{cases}$	$x=2$ $y=1$	12. $\begin{cases}x+y=7\\2x-3y=-1\end{cases}$	$x=4$ $y=3$
13 $\begin{cases}-x+y=2\\4x-3y=-3\end{cases}$	$x=3$ $y=5$	14. $\begin{cases}4x-3y=28\\9x-y=-6\end{cases}$	$x=-2$ $y=-12$	15 $\begin{cases}3x-2y=8\\-6x+4y=16\end{cases}$	Sin sln
16 $\begin{cases}8x-3y=-3\\5x-2y=-1\end{cases}$	$x=-3$ $y=-7$	17 $\begin{cases}2x-6y=10\\-x+3y=-5\end{cases}$	$x=t$ $y=\dfrac{t-5}{3}$	18 $\begin{cases}x-y=4\\xy=12\end{cases}$	$x=6 \quad y=2$ $x=-2 \quad y=-6$
19. $\begin{cases}4x+2y=16\\x-5y=70\end{cases}$	$x=10$ $y=-12$	20. $\begin{cases}x+4y=8\\3x+12y=2\end{cases}$	Sin sln	21. $\begin{cases}6x+4y=12\\9x+6y=18\end{cases}$	$x=t$ $y=3-\dfrac{3}{2}t$
22 $\begin{cases}-3x+5y=2\\9x-15y=6\end{cases}$	Sin sln	23. $\begin{cases}y=4-x^2\\y=x^2-4\end{cases}$	$x=2 \quad y=0$ $x=-2 \quad y=0$	24. $\begin{cases}x+y^2=4\\y+4x=16\end{cases}$	$x=63/16 \quad y=1/4$ $x=4 \quad y=0$
25 $\begin{cases}2x-3y=-8\\14x-21y=3\end{cases}$	Sin sln	26. $\begin{cases}x+2y=7\\5x-y=2\end{cases}$	$x=1$ $y=3$	28 $\begin{cases}3x^2+4y=17\\2x^2+5y=2\end{cases}$	$x=\sqrt{11} \quad y=-4$ $x=-\sqrt{11} \quad y=-4$
29 $\begin{cases}x^2-y=1\\2x^2+3y=17\end{cases}$	$x=2 \quad y=3$ $x=-2 \quad y=3$	30 $\begin{cases}y=x^2\\y=x+12\end{cases}$	$x=4 \quad y=16$ $x=-3 \quad y=9$	31. $\begin{cases}x^2+y^2=8\\x+y=0\end{cases}$	$x=-2 \quad y=2$ $x=2 \quad y=-2$
32 $\begin{cases}x^2-y=1\\2x^2+3y=17\end{cases}$	$x=2 \quad y=3$ $x=-2 \quad y=3$	33 $\begin{cases}x^2-2y=1\\x^2+5y=29\end{cases}$	$x=3 \quad y=4$ $x=-3 \quad y=4$	34 $\begin{cases}x^2+y^2=25\\y=2x\end{cases}$	$x=\sqrt{5} \quad y=2\sqrt{5}$ $x=-\sqrt{5} \quad y=-2\sqrt{5}$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON VARIAS VARIABLES

Una ecuación lineal en n variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ tiene la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

Los coeficientes $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son números reales y el término constante b es un número real. El número a_1 es el coeficiente principal y x_1 es la variable principal.

Resolver un sistema triangular por sustitución

$$\begin{cases}x & -2y & -z & = & 1\\ & y & +2z & = & 5\\ & & z & = & 3\end{cases}$$

Operaciones que conducen a sistemas de ecuaciones lineales equivalentes

1. Intercambiar dos ecuaciones.
2. Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.
3. Sumar un “múltiplo constante” de una ecuación a otra ecuación.

El proceso realizado con las operaciones anteriores para resolver un sistema lineal se denomina eliminación gaussiana.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema utilizando la eliminación gaussiana.

$$\begin{cases} x & -2y & +4z & = & -20 \\ 4x & +2y & -4z & = & 10 \\ 3x & +2y & -3z & = & 5 \end{cases}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +4z & = & -20 \\ 4x & +2y & -4z & = & 10 \\ 3x & +2y & -3z & = & 5 \end{array}\right\} \text{Sumamos -4 veces la primera ecuación a la segunda}$$

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +4z & = & -20 \\ & +10y & -20z & = & 90 \\ 3x & +2y & -3z & = & 5 \end{array}\right\} \text{Sumamos -3 veces la primera ecuación a la tercera}$$

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +4z & = & -20 \\ & +10y & -20z & = & 90 \\ & 8y & -15z & = & 65 \end{array}\right\} \text{Multiplicamos por } \tfrac{1}{10} \text{ la segunda ecuación}$$

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +4z & = & -20 \\ & y & -2z & = & 9 \\ & 8y & -15z & = & 65 \end{array}\right\} \text{Sumamos -8 veces la segunda ecuación a la tercera}$$

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +4z & = & -20 \\ & y & -2z & = & 9 \\ & & z & = & -7 \end{array}\right\} \text{Hallamos las soluciones por sustitución}$$

De la tercera ecuación vemos que $\boxed{z=-7}$, al sustituirla en la segunda ecuación $y-2(-7)=9$, obtenemos $\boxed{y=-5}$. Para obtener el valor de x sustituimos $z=-7$ y $y=-5$ en la primera ecuación $x-2(-5)+4(-7)=-20$, con lo cual $\boxed{x=-2}$

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

Ejercicio	Respuesta.	Ejercicio	Respuesta.
1. $\begin{cases} x & -2y & +4z & = & 3 \\ & y & +2z & = & 7 \\ & & z & = & 2 \end{cases}$	$x=1$ $y=3$ $z=2$	2. $\begin{cases} x & +y & -3z & = & 8 \\ & y & -3z & = & 5 \\ & & z & = & -1 \end{cases}$	$x=3$ $y=2$ $z=-1$
3. $\begin{cases} x & -2y & +3z & = & 10 \\ & 2y & -z & = & 2 \\ & & 3z & = & 12 \end{cases}$	$x=4$ $y=3$ $z=4$	4. $\begin{cases} 2x & -y & +6z & = & 5 \\ & y & +4z & = & 0 \\ & & -2z & = & 1 \end{cases}$	$x=5$ $y=2$ $z=-\frac{1}{2}$
5. $\begin{cases} x & +2y & +z & = & 7 \\ & -y & +3z & = & 9 \\ & & 2z & = & 6 \end{cases}$	$x=4$ $y=0$ $z=3$	6. $\begin{cases} 4x & & +3z & = & 10 \\ & 2y & -z & = & -6 \\ & & \frac{1}{2}z & = & 4 \end{cases}$	$x=-\frac{7}{2}$ $y=1$ $z=8$

7. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 3 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$	$x=1$ $y=-3$ $z=2$	8. $\begin{cases} x - 4z = 1 \\ 2x - y - 6z = 4 \\ 2x + 3y - 2z = 8 \end{cases}$	$x=5$ $y=0$ $z=1$
9. $\begin{cases} 2x + 4y - z = 2 \\ x + 2y - 3z = -4 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$	$x=0$ $y=1$ $z=2$	10. $\begin{cases} 2x + y - z = -8 \\ -x + y + z = 3 \\ -2x + 4z = 18 \end{cases}$	$x=-1$ $y=-2$ $z=4$
11. $\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + 2y - z = 6 \\ 3x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$	Sin sln	12. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + 3z = 10 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$	$x=1$ $y=2$ $z=1$
13. $\begin{cases} x - y + 5z = -2 \\ 2x + y + 4z = 2 \\ 2x + 4y - 2z = 5 \end{cases}$	Sin sln	14. $\begin{cases} x - 2y - 3z = 5 \\ 2x + y - z = 5 \\ 4x - 3y - 7z = 5 \end{cases}$	Sin sln
15. $\begin{cases} y - 2z = 0 \\ 2x + 3y = 2 \\ -x - 2y + z = -1 \end{cases}$	Sin sln	16. $\begin{cases} x \quad 2y + z = 3 \\ 5x + 4y + 3z = -1 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$	$x=-{}^{13}\!/_2$ $y=-{}^{3}\!/_2$ $z={}^{25}\!/_2$
17. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = -3 \\ 3x + 6y - 3z = 4 \end{cases}$	Sin sln	18. $\begin{cases} x + 2y + 5z = 4 \\ x \quad y - 2z = 0 \\ 4x - 2y - 11z = 2 \end{cases}$	$x=2$ $y=-{}^{2}\!/_3$ $z={}^{2}\!/_3$
19. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 2y = 3 \\ x + 3y + z = 4 \end{cases}$	Sin sln	20. $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - 5y + z = 7 \\ 2x \quad 3y \quad 5z = 1 \end{cases}$	$x={}^{5}\!/_2$ $y=-{}^{1}\!/_2$ $z=-{}^{1}\!/_2$
21. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = -3 \\ 2x + 3y - 4z = -3 \end{cases}$	Sin sln	22. $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x + 4z = 4 \\ 4x + 6y + y = 4 \end{cases}$	$x=2$ $y=-{}^{2}\!/_3$ $z=0$

DETERMINANTES Y LA REGLA DE CRAMER

Asociado a cada matriz cuadrada *A* (igual número de renglones que de columnas) hay un número llamado **determinante de A**, denotado como “det *A*”. Los determinantes nos proporcionan un método para el cálculo de la matriz inversa (en caso de existir) y un criterio para estudiar si una matriz es o no invertible. Sus aplicaciones son múltiples en todas las ramas de las ciencias que tratan problemas lineales en los que necesariamente aparecen matrices. Los determinantes se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Si *A* es una matriz cuadrada de primer orden, entonces *A* tiene sólo un elemento. Así, $A = (a_{11})$ y definimos “det *A*” = a_{11}

Definición del determinante de una matriz *A* de *2x2*

$$"\det A"=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

El determinante de una matriz se expresa como $"\det A"$ o $|A|$ para este texto utilizaremos la notación $"\det A"$

Ejemplo: Búsqueda del determinante de una matriz de 2x2

Encontrar "det *A*" si $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN.

$$"\det A"=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}=(3)(-6)-(4)(-2)=-18+8=-10$$

Los menores y los cofactores son de gran utilidad para encontrar determinantes de matrices de orden *n>1*.

Definición de menores y cofactores Sea $A=(a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden *n>1*

1) El **Menor** M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz de orden *n-1* obtenido al borrar el renglón *i* y la columna *j*.

2) El **cofactor** A_{ij} del elemento a_{ij} es $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

Para hallar el menor de un elemento, borramos el renglón y la columna en que aparece el elemento y luego encontramos el determinante de la matriz cuadrada resultante.
Para obtener el cofactor de a_{ij} de una matriz cuadrada $A=(a_{ij})$, encontramos el menor y lo multiplicamos por 1 ó -1, dependiendo de si la suma de *i* y *j* es par o impar, respectivamente.

Otra forma de recordar el signo $(-1)^{i+j}$ asociado con el cofactor A_{ij} es considerar la siguiente tabla de signos más y menos

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Definición del determinante de una matriz *A* de 3*x3*

$$"\det A"=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

Así el determinante se halla al multiplicar cada elemento del renglón uno por su cofactor y sumarlos, esto se conoce como expandir renglón uno $(ExpR_1)$. Para hallar el determinante de una matriz se puede expandir cualquier de los tres renglones o columnas así:

$$ExpR_2 = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$
$$ExpR_3 = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$
$$ExpC_1 = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$
$$ExpC_2 = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$ExpC_3 = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

Ejemplo: Encuentre "$\det A$" si $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN. Vamos a expandir El renglón dos

$$ExpR_2 = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$
$$\text{"}\det A\text{"} = 5\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{"}\det A\text{"} = 5(9-2) - (-6-1) + 4(-4-3) = 35 + 7 - 28 = 14 \qquad \boxed{\text{"}\det A\text{"} = -14}$$

Ahora hallaremos el determinante de esta matriz expandiendo la columna tres

$$ExpC_3 = A_{13} + 4A_{23} + 3A_{33}$$
$$\text{"}\det A\text{"} = 1\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{"}\det A\text{"} = (10-1) - 4(-4-3) + 3(-2-15) = 9 + 28 - 51 = 14 \qquad \boxed{\text{"}\det A\text{"} = -14}$$

Podemos expandir cualquiera de los tres renglones o columnas y el determinante siempre será el mismo.

Algunas veces las soluciones de los sistemas lineales se pueden hallar utilizando determinantes

Definición de la regla de Cramer para un sistema de dos variables.

El valor de cada incógnita es una fracción cuyo denominador es el determinante formado con los coeficientes de las incógnitas (determinante del sistema) y cuyo numerador es el determinante que se obtiene sustituyendo en el determinante del sistema la columna de los coeficientes de la incógnita que se halla por la columna de los términos independientes de las ecuaciones dadas.

$$x = \frac{\text{"}\det A_x\text{"}}{\text{"}\det A\text{"}} \qquad x = \frac{\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \qquad y = \frac{\text{"}\det A_y\text{"}}{\text{"}\det A\text{"}} \qquad y = \frac{\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$$

Ejemplo: resolver el sistema utilizando la regla de cramer $\begin{cases} 3x+4y=10 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

Solución.

$$x=\frac{\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}=\frac{10-20}{3-8}=\frac{-10}{-5}=2 \qquad y=\frac{\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}=\frac{15-20}{3-8}=\frac{-5}{-5}=1$$

La solución del sistema es $(2, \quad 1)$

Resolver $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$

$$x=\frac{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}=\frac{15-16}{3-4}=\frac{-1}{-1}=1 \qquad y=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}=\frac{8-10}{3-4}=\frac{-2}{-1}=2$$

La solución del sistema es $(1, \quad 2)$

Definición de la regla de Cramer para un sistema de n variables.

$$x_1=\frac{\text{"}\det A_{x_1}\text{"}}{\text{"}\det A\text{"}}, \qquad x_2=\frac{\text{"}\det A_{x_2}\text{"}}{\text{"}\det A\text{"}}, \ \ldots\ldots.., \qquad x_n=\frac{\text{"}\det A_{x_n}\text{"}}{\text{"}\det A\text{"}}$$

Resolver el siguiente sistema por el método de los determinantes.

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 4 \\ 2x & -3y & +5z & = & -5 \\ 3x & +4y & +7z & = & 10 \end{cases}$$

$$\text{"}\det A\text{"}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad ExpR_1=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

$$\text{"}\det A\text{"}=1\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}-1\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}+1\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{"}\det A\text{"}=(-21-20)-(14-15)+(8+9)=-41+1+17=-23 \qquad \boxed{\text{"}\det A\text{"}=-23}$$

$$"\det A_x"=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 5 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad ExpR_1 = 4A_{11} + A_{12} + A_{13}$$

$$"\det A_x"= 4\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$"\det A_x"= 4(-21-20)-(-35-50)+(-20+30) = -164+85+10 = -69 \qquad \boxed{"\det A_x"=-69}$$

$$"\det A_y"=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix} \qquad ExpR_1 = A_{11} + 4A_{12} + A_{13}$$

$$"\det A_y"= 1\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$"\det A_y"= (-35-50)-4(14-15)+(20+15) = -85+4+35 = -46 \qquad \boxed{"\det A_x"=-69}$$

$$"\det A_z"=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 10 \end{pmatrix} \qquad ExpR_1 = A_{11} + A_{12} + 4A_{13}$$

$$"\det A_z"= 1\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$"\det A_z"= (-30+20)-(20+15)+4(8+9) = -10-35+68 = 23 \qquad \boxed{"\det A_z"=23}$$

Entonces los valores de las tres variables son:

$$\boxed{X = \frac{-69}{-23} = 3} \qquad \boxed{Y = \frac{-46}{-23} = 2} \qquad \boxed{Z = \frac{23}{-23} = -1}$$

Así la solución del sistema es: $(x=3, y=2, z=-1)$

Definición de la regla de Sarrus para un sistema de tres variables.

$$"\det A"=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{13} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Ejemplo: Hallar la solución del sistema utilizando la regla de Sarrus

$$\begin{cases} 2x & +y & -3z & = & 12 \\ 5x & -4y & +7z & = & 27 \\ 10x & +3y & -z & = & 40 \end{cases}$$

$$X = \frac{\begin{pmatrix} 12 & 1 & -3 \\ 27 & -4 & 7 \\ 40 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 12 & 1 \\ 27 & -4 \\ 40 & 3 \end{matrix}}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \\ 10 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \\ 10 & 3 \end{matrix}} = \frac{[(48)+(280)+(-243)]-[(480)+(252)+(-27)]}{[(8)+(70)+(-45)]-[(120)+(42)+(-5)]} = \frac{-620}{-124} = 5$$

$$Y = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 12 & -3 \\ 5 & 27 & 7 \\ 10 & 40 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2 & 12 \\ 5 & 27 \\ 10 & 40 \end{matrix}}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \\ 10 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \\ 10 & 3 \end{matrix}} = \frac{[(-54)+(840)+(-600)]-[(-810)+(560)+(-60)]}{[(8)+(70)+(-45)]-[(120)+(42)+(-5)]} = \frac{496}{-124} = -4$$

$$Z = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 5 & -4 & 27 \\ 10 & 3 & 40 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \\ 10 & 3 \end{matrix}}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \\ 10 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \\ 10 & 3 \end{matrix}} = \frac{[(-320)+(270)+(180)]-[(-480)+(162)+(200)]}{[(8)+(70)+(-45)]-[(120)+(42)+(-5)]} = \frac{248}{-124} = -2$$

Así la solución del sistema es: $(x=5, y=-4, z=-2)$

Resolver el sistema de ecuaciones

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1. $\begin{cases} -4x & -2y & -5z & = & 3 \\ 6x & +6y & +12z & = & 6 \\ 8x & 4y & 10z & = & 15 \end{cases}$	$x=0$ $y=0$ $z=0$	2. $\begin{cases} x & +3y & -z & = & -3 \\ 3x & -y & +2z & = & 1 \\ 2x & -y & +z & = & -1 \end{cases}$	$x=-2$ $y=1$ $z=4$
3. $\begin{cases} 2x & -3y & +2z & = & -3 \\ -3x & +2y & +z & = & 1 \\ 4x & +y & -3z & = & 4 \end{cases}$	$x=2/3$ $y=31/21$ $z=1/21$	4. $\begin{cases} 3x & +2y & -z & = & 4 \\ x & 2y & -6z & = & 4 \\ 3x & +2y & +4z & = & 0 \end{cases}$	$x=2$ $y=7/5$ $z=-4/5$
5. $\begin{cases} -x & +3y & +z & = & 1 \\ 2x & +5y & & = & 3 \\ 3x & +y & -2z & = & -2 \end{cases}$	$x=7/3$ $y=-1/3$ $z=39/9$	6. $\begin{cases} 2x & +2y & -z & = & 5 \\ 3x & -2y & +5z & = & 4 \\ 5x & -5y & +4z & = & 2 \end{cases}$	$x=89/65$ $y=7/5$ $z=7/13$

7. $\begin{cases} 2x + 2y - z = 3 \\ 2y - 6z = 4 \\ x - 5y + 4z = 2 \end{cases}$	$x = 49/27$ $y = -7/9$ $z = 25/27$	8. $\begin{cases} -x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y = 3 \\ 3x + y - 2z = -2 \end{cases}$	$x = 7/3$ $y = -1/3$ $z = 13/3$
9. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ 2y - 6z = 4 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$	$x = 4/3$ $y = -2/5$ $z = -4/5$	10. $\begin{cases} 2x + 2y - z = 3 \\ 2y - 6z = 4 \\ x - 5y + 4z = 2 \end{cases}$	$x = 49/27$ $y = -7/9$ $z = -25/27$
11. $\begin{cases} 2x + 2y - z = 3 \\ -2y - 6z = 4 \\ x - 5y + 4z = 2 \end{cases}$	$x = 77/45$ $y = -7/15$ $z = -23/45$	12. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -17 \\ 3x - 2y + 3z = -17 \\ x + 2y - 7z = 37 \end{cases}$	$x = -2$ $y = -5$ $z = -7$