

EXPRESIONES RACIONALES

Una expresión racional es el cociente de dos polinomios. Ejemplo:

$$\frac{5x}{x^2 - 1}$$

$$\frac{x^3 - 2x}{x^2 - 5x + 8}$$

$$\frac{\sqrt{x} - 9}{x + 5}$$

Dominio de una expresión algebraica

Una expresión algebraica puede no estar definida en todos los valores de la variable. El conjunto de los números reales que puede tener la variable se denomina **el dominio**

Determinar el dominio de las siguientes expresiones

| Ejercicio | Respuesta | Ejercicio | Respuesta |
|---|---------------------------------------|--|--|
| 1) $-x^2 - 6x - 3$ | $(-\infty, \infty)$ | 2) $x^2 + 5x - 3$ | $(-\infty, \infty)$ |
| 3) $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$ | $R - \{-1\}$ | 4) $\frac{3x - 5}{x + 2}$ | $R - \{-2\}$ |
| 5) $\frac{y^2 - 5y - 3}{2y^2 + 5y + 3}$ | $R - \left\{-1, -\frac{3}{2}\right\}$ | 6) $\frac{3x^2 + 4x - 3}{2x^2 - 7x + 6}$ | $R - \left\{2, \frac{3}{2}\right\}$ |
| 7) $\frac{5x}{x^2 + 1}$ | $(-\infty, \infty)$ | 8) $\frac{2t}{3t - 2}$ | $R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ |
| 9) $\frac{5x}{x^2 - 1}$ | $R - \{-1, 1\}$ | 10) $\frac{5x}{x^3 - 1}$ | $R - \{1\}$ |
| 11) $\sqrt{x + 2}$ | $[-2, \infty)$ | 12) $\sqrt{x - 5}$ | $[5, \infty)$ |
| 13) $\frac{1}{\sqrt{x + 2}}$ | $(-2, \infty)$ | 14) $\frac{1}{\sqrt{x - 5}}$ | $(5, \infty)$ |
| 15) $\sqrt{x^2 - 4}$ | $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ | 16) $\sqrt{4 - x^2}$ | $[-2, 2]$ |
| 17) $\frac{x}{\sqrt[4]{9 - x^2}}$ | $(-3, 3)$ | 18) $\frac{t}{\sqrt[3]{t + 1}}$ | $R - \{-1\}$ |
| 19) $\sqrt{x^2 + 10x + 25}$ | $(-\infty, \infty)$ | 20) $\sqrt{x^2 - 3x - 28}$ | $(-\infty, -4] \cup [7, \infty)$ |
| 21) $\sqrt{x^2 - 2x - 8}$ | $(-\infty, -2] \cup [4, \infty)$ | 22) $\frac{\sqrt{x}}{2x^2 + x - 1}$ | $[0, \infty) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ |

Simplificación de expresiones racionales

La simplificación de expresiones racionales se realiza utilizando la siguiente propiedad $\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$

Simplificar las siguientes expresiones racionales

| Ejercicio | Respuesta | Ejercicio | Respuesta |
|--|------------------------|---|---------------------------------|
| 1) $\frac{x^2-1}{x-1}$ | $x+1$ | 2) $\frac{2x^2+3x-2}{x^2-6x-16}$ | $\frac{2x-1}{x-8}$ |
| 3) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-x-12}$ | $\frac{x+2}{x-4}$ | 4) $\frac{2x-3}{4x^2-9}$ | $\frac{1}{2x+3}$ |
| 5) $\frac{(1+x)^2-1}{x}$ | $2+x$ | 6) $\frac{3x-1}{3x^2+5x-2}$ | $\frac{1}{x+2}$ |
| 7) $\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ | $2x+h$ | 8) $\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ | $\frac{x+3}{x-2}$ |
| 9) $\frac{h^3-8}{h^2-4}$ | $\frac{h^2+2h+4}{h+2}$ | 10) $\frac{r^2-r}{2r^2+5r-7}$ | $\frac{r}{2r+7}$ |
| 11) $\frac{2x^2-x-1}{x-1}$ | $2x+1$ | 12) $\frac{x^4-16}{x^3-8}$ | $\frac{(x^2+4)(x+2)}{x^2+2x+4}$ |
| 13) $\frac{x^2-9}{x^2-2x-15}$ | $\frac{x-3}{x-5}$ | 14) $\frac{3x^3-12x}{x^2-4x+4}$ | $\frac{3x(x+2)}{x-2}$ |
| 15) $\frac{x^2+5}{x^4-25}$ | $\frac{1}{x^2-5}$ | 16) $\frac{a^2+2ab+b^2}{3a+3b}$ | $\frac{a+b}{3}$ |
| 17) $\frac{m^2-n^2}{m^2+2mn+n^2}$ | $\frac{m-n}{m+n}$ | 18) $\frac{x^3+3x^2-10x}{x^3-4x^2+4x}$ | $\frac{x+5}{x-2}$ |
| 19) $\frac{x^4-1}{3x^2-3}$ | $\frac{x^2+1}{3}$ | 20) $\frac{m^3-n^3}{5m^2+5mn+5n^2}$ | $\frac{m-n}{5}$ |
| 21) $\frac{9x^2+30x+25}{6x+10}$ | $\frac{3x+5}{2}$ | 22) $\frac{ac-ad+bc-bd}{2c+3bc-2d-3bd}$ | $\frac{a+b}{2+3b}$ |
| 23) $\frac{16x^2y-25y}{4x^2y-3xy-10y}$ | $\frac{4x-5}{x-2}$ | 24) $\frac{xy-x+6y-6}{xy+x+6y+6}$ | $\frac{y-1}{y+1}$ |

Multiplicación y división de expresiones racionales

Realizar las siguientes operaciones

| Ejercicio | Respuesta | Ejercicio | Respuesta |
|--|-----------------------------|---|---------------------------------|
| 1) $\frac{2xy^4}{3a^3b} \cdot \frac{5x^3y}{7ab^4}$ | $\frac{10x^4y^5}{21a^4b^5}$ | 2) $\frac{a^5b^8c^7}{a^4b^6c^{10}} \div \frac{a^6b^8c^9}{a^3b^2c^5}$ | $\frac{1}{a^2b^4c^2}$ |
| 3) $\frac{x^2y^3}{(a^3b^4)^5} \cdot \frac{(a^2b^3)^4}{(x^2y)^5}$ | $\frac{1}{x^8y^2a^7b^8}$ | 4) $\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6}$ | $\frac{x+3}{(x-2)(x+1)}$ |
| 5) $\frac{-x^3y^4}{x^4y^5} \cdot \frac{x^7y^8}{-x^{15}y^3}$ | $\frac{y^4}{x^9}$ | 6) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+8x+16} \cdot \frac{3x+12}{x-1}$ | $\frac{3(x+3)}{x+4}$ |
| 7) $\frac{4x}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{16x}$ | $\frac{1}{4(x-2)}$ | 8) $\frac{t^2+7t+12}{t^2+3t+2} \cdot \frac{t^2+5t+6}{t^2+6t+9}$ | $\frac{t+4}{t+1}$ |
| 9) $\frac{35a^3}{18b^3} \div \frac{14ab^2}{9b^3}$ | $\frac{5a^2}{4b^2}$ | 10) $\frac{a^2+9a+18}{a^2+8a+15} \cdot \frac{a^2+7a+10}{a^2+11a+18}$ | $\frac{a+6}{a+9}$ |
| 11) $\frac{x^2-25}{x^2-16} \cdot \frac{x+4}{x+5}$ | $\frac{x-5}{x-4}$ | 12) $\frac{z^2-10z+16}{z^2-9z+14} \cdot \frac{z^2-10z+21}{z^2+2z-15}$ | $\frac{z-8}{z+5}$ |
| 13) $\frac{6x^2+9xy}{a^3} \div \frac{14x^3+21x^2y}{a}$ | $\frac{3}{7a^2x}$ | 14) $\frac{2x^2+3x+1}{x^2+2x-15} \div \frac{x^2+6x+5}{2x^2-7x+3}$ | $\frac{(2x+1)(2x-1)}{(x+5)^2}$ |
| 15) $\frac{x^3}{x+1} \div \frac{x}{x^2+2x+1}$ | $x(x+1)$ | 16) $\frac{4y^2-9}{2y^2+9y-18} \div \frac{2y^2+y-3}{y^2+5y-6}$ | 1 |
| 17) $\frac{a^3+a}{a^2-a} \div \frac{a^3-a^2}{a^2-2a+1}$ | $\frac{a^2+1}{a^2}$ | 18) $\frac{m^2+8m+16}{m^2+2m-8} \div \frac{m^2-2m-3}{m^2-3m+2}$ | $\frac{(m+4)(m-1)}{(m-3)(m+1)}$ |
| 19) $\frac{x^3-x}{x+1} \div \frac{x-1}{x+1}$ | $x(x+1)$ | 20) $\frac{m^2-3m+2}{m^2-5m+4} \div \frac{m^2+6m-16}{m^2+m-20}$ | $\frac{m+5}{m+8}$ |
| 21) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3} \cdot \frac{3-x}{3+x}$ | $\frac{-(x-1)}{x+1}$ | 22) $\frac{x^4-y^4}{x^2+2xy+y^2} \div \frac{x^2+y^2}{x^2+2xy+y^2}$ | $(x+y)(x-y)$ |
| 23) $\frac{y-3}{y^2+9} \cdot \frac{y+3}{y^2-9}$ | $\frac{1}{y^2+9}$ | 24) $\frac{2x^2-3x-2}{x^2-1} \div \frac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}$ | $\frac{x-2}{x+1}$ |
| 25) $\frac{x^2-x-12}{x^2-9} \cdot \frac{3+x}{4-x}$ | $\frac{-(x+3)}{x-3}$ | 26) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{2x^2-xy-y^2}{x^2-xy-2y^2}$ | $\frac{2x+y}{x-2y}$ |

Adición y sustracción de expresiones racionales

Realizar la operación y simplificar

| Ejercicio | Respuesta | Ejercicio | Respuesta |
|---|-------------------------------|---|------------------------------------|
| 1) $\frac{x+3}{x+2} + \frac{2x+3}{x+2}$ | 3 | 2) $\frac{5x+1}{x+1} - \frac{2x-4}{x+1}$ | $\frac{3x+5}{x+1}$ |
| 3) $2 + \frac{x}{x+3}$ | $\frac{3(x+2)}{x+3}$ | 4) $\frac{2x-1}{x+4} - 1$ | $\frac{x-5}{x+4}$ |
| 5) $\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2}$ | $\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2)}$ | 6) $\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x-3}$ | $\frac{x^2-x+4}{(x+2)(x-3)}$ |
| 7) $\frac{1}{x+5} - \frac{2}{x-3}$ | $\frac{-x-13}{(x+5)(x-3)}$ | 8) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ | $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ |
| 9) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$ | $\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$ | 10) $\frac{x}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1}$ | $\frac{3x+2}{(x+1)^2}$ |
| 11) $\frac{x}{x^2-4} + \frac{3}{x+2}$ | $\frac{4x-6}{(x-2)(x+2)}$ | 12) $\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{(x+1)^2}$ | $\frac{-x+3}{(x-1)(x+1)^2}$ |
| 13) $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2-9}$ | $\frac{x-2}{(x+3)(x-3)}$ | 14) $x+1 + \frac{x}{x+1}$ | $\frac{x^2+3x+1}{x+1}$ |
| 15) $\frac{5}{2x-3} - \frac{3}{(2x-3)^2}$ | $\frac{10x-18}{(2x-3)^2}$ | 16) $\frac{x}{x^2-x-6} - \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-3}$ | $\frac{-2x-1}{(x+2)(x-3)}$ |
| 17) $\frac{x+10}{x^2-4} - \frac{x+4}{x^2+4x+4}$ | $\frac{10x+28}{(x-2)(x+2)^2}$ | 18) $\frac{12x-4}{x^2-4x+4} - \frac{2}{x-2}$ | $\frac{10x}{(x-2)^2}$ |
| 19) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ | $\frac{x^2+x+1}{x^3}$ | 20) $\frac{2}{x^2} - \frac{3}{xy} + \frac{4}{y^2}$ | $\frac{2y^2-3xy+4x^2}{x^2y^2}$ |
| 21) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+x}$ | $\frac{2x+1}{x^2(x+1)}$ | 22) $\frac{1}{x^2+3x+2} - \frac{1}{x^2-2x-3}$ | $\frac{-5}{(x+2)(x-3)(x+1)}$ |
| 23) $\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x^2+7x+12}$ | $\frac{2x+7}{(x+4)(x+3)}$ | 24) $\frac{x}{x^2+x-2} - \frac{2}{x^2-5x+4}$ | $\frac{x^2-4x-2}{(x+2)(x-3)(x+1)}$ |
| 25) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{4}{x^2-x}$ | $\frac{5x-6}{x(x-1)}$ | 26) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{x^2-1}$ | $\frac{x^2+x+4}{(x+1)^2(x-1)}$ |

FRACCIONES COMPUESTAS

Una fracción compuesta es aquella en que el numerador, el denominador, o ambos son expresiones fraccionarias.

Simplificar las siguientes fracciones compuestas

| Ejercicio | Respuesta | Ejercicio | Respuesta |
|---|---------------------|---|----------------------------------|
| 1) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x+1}}$ | $\frac{2x+3}{x+2}$ | 2) $x - \frac{y}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}$ | $\frac{x^3}{x^2 + y^2}$ |
| 3) $\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}$ | $-xy$ | 4) $\frac{\frac{x}{y} + 1}{1 - \frac{y}{x}}$ | $\frac{x(x+y)}{y(x-y)}$ |
| 5) $\frac{1 + \frac{1}{c-1}}{1 - \frac{1}{c-1}}$ | $\frac{c}{c-2}$ | 6) $\frac{\frac{5}{x-1} - \frac{2}{x+1}}{\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1}}$ | $\frac{3x+7}{x^2 + 2x - 1}$ |
| 7) $\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h}$ | $\frac{-1}{a(a+h)}$ | 8) $\frac{1}{1+a^n} + \frac{1}{1+a^{-n}}$ | 1 |
| 9) $\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}}$ | $\frac{(y-x)}{xy}$ | 10) $\frac{x^{-1} + y^{-1}}{(x+y)^{-1}}$ | $\frac{(x+y)^2}{xy}$ |
| 11) $\frac{\frac{a-b}{a} - \frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b} + \frac{a+b}{a}}$ | -1 | 12) $\frac{\left(a + \frac{1}{b}\right)^m \left(a - \frac{1}{b}\right)^n}{\left(b + \frac{1}{a}\right)^m \left(b - \frac{1}{a}\right)^n}$ | $\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$ |

Racionalización

Racionalizar y simplificar

| Ejercicio | Respuesta | Ejercicio | Respuesta |
|---|--|---|--|
| 1) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ | $-1+\sqrt{2}$ | 2) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ | $2+\sqrt{3}$ |
| 3) $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$ | $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ | 4) $\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ | $\frac{-2(\sqrt{2}-\sqrt{7})}{5}$ |
| 5) $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ | $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ | 6) $\frac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}$ | $\frac{y(\sqrt{3}-\sqrt{y})}{3-y}$ |
| 7) $\frac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ | $2(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ | 8) $\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ | $\sqrt{x+1}+1$ |
| 9) $\frac{x-81}{\sqrt{x}-9}$ | $\sqrt{x}+9$ | 10) $\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$ | $\sqrt{x+2}+2$ |
| 11) $\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$ | $(x+1)(\sqrt{x}+1)$ | 12) $\frac{k^2-16}{\sqrt{k}-2}$ | $(k+4)(\sqrt{k}+2)$ |
| 13) $\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ | $\frac{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{\sqrt{2x+1}+3}$ | 14) $\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$ | $\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x-1}+1}$ |
| 15) $\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}$ | 16) $\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ | $\frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})}$ |
| 17) $\frac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}$ | $\frac{-(2+\sqrt{8-x})}{3+\sqrt{5+x}}$ | 18) $\frac{3(\sqrt{x+2}-2)}{4(8-\sqrt{32x})}$ | $\frac{-3(8+\sqrt{32x})}{128(\sqrt{x+2}+2)}$ |
| 19) $\frac{3-\sqrt{2x-1}}{3(\sqrt{5x}-5)}$ | $\frac{-2(\sqrt{5x}+5)}{15(3+\sqrt{2x-1})}$ | 20) $\frac{2a-3b-\sqrt{ab}}{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}$ | $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ |