

EXPONENTES Y RADICALES

POTENCIACIÓN: Si a es un número real cualquiera y n es un entero positivo, entonces la potencia n -ésima de a es

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a$$

El número a se denomina base y n es el exponente.

Propiedades de los exponenciales

Para todo $a, b \in R$ y $m, n \in Z^+$ se cumplen las siguientes propiedades:

- 1) Un número elevado a 0 es igual a 1 $a^0 = 1$
- 2) Un número elevado a 1 es igual a sí mismo $a^1 = a$
- 3) Producto de potencias de igual base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- 4) Producto de potencias de igual exponente: $(ab)^n = a^n b^n$
- 5) Cociente de potencias de igual base: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, con $a \neq 0$
- 6) Cociente de potencias de igual exponente: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, con $b \neq 0$
- 7) Potencia de una potencia: $\left((a^n)^m\right) = a^{n \cdot m}$
- 8) Axioma de igualdad: si $a = b$ entonces $a^n = b^n$

Ejercicios. Escribir en forma de una sola potencia:

- 1) $3^3 \cdot 3^4 \cdot 3 =$
- 2) $5^7 \div 5^3 =$
- 3) $(5^3)^4 =$
- 4) $(5 \cdot 2 \cdot 3)^4 =$
- 5) $\left[(5^3)^4\right]^2 =$
- 6) $2^5 \cdot 2^4 \cdot 2 =$
- 7) $2^7 \div 2^{-3} =$
- 8) $\left[(2^3)^4 (3^4)^5\right]^0 =$
- 9) $(4 \cdot 2 \cdot 4)^7 =$
- 10) $(-2)^2 (-2)^3 (-2)^4 =$
- 11) $\left[(-5)^{-2}\right]^3 (-5)^3 (-5)^4 =$
- 12) $(-8)(-2)^2 (-2)^0 (-2) =$

Realizar las siguientes operaciones con potencias

13) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$	14) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$	15) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$	16) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$
17) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \div \left(\frac{2}{3}\right)^3$	18) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$	19) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$	20) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2} \div \left(\frac{27}{8}\right)^{-3}$
21) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \left(\frac{81}{16}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5} \left(\frac{2}{3}\right) \left[\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^2 \left(\frac{8}{27}\right)^3}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{15}$	22) $\frac{\left(2-\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7} \cdot \frac{5}{4} - \frac{2}{7} \div \frac{1}{2}\right)^3}{\left(3-\frac{2}{9}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \div \frac{1}{5}\right)} - 5\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$
23) $\frac{2^{n+3} - 2^n + 7}{2^{n+1} - 2^n + 1}$	7	24) $\frac{(3^{2n})^{n-1} \cdot (81^n)^{2-n} (243)^{n(n-1)}}{3^3 \cdot 3^{n-2} \cdot (27^{n-1})^{n+1}}$	9

RADICACIÓN: Si n es un entero positivo, entonces la raíz n -ésima principal de a se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ quiere decir que } b^n = a$$

Si n es par, debemos tener $a \geq 0 \wedge b \geq 0$

Propiedades de los radicales

Para todo $a, b \in R$ y $m, n \in Z^+$ con $n > 1$ se cumplen las siguientes propiedades:

1) Producto de raíces de igual índice: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ excepto cuando a y b son ambos negativos y n es par

2) Producto de raíces de igual radicando: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{n+m}}$

3) Cociente de raíces de igual índice: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, con $b \neq 0$

4) Cociente de raíces de igual radicando: $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$, con $a \neq 0$

5) Raíz de una raíz $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

6) Simplificación de radicales: $\sqrt[mn]{a^{mq}} = \sqrt[n]{a^q}$

7) Axioma de igualdad: si $a = b$ entonces $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$

$$8) \sqrt[n]{a^n} \begin{cases} |a| & \text{Si } n \text{ par} \\ a & \text{Si } n \text{ impar} \end{cases}$$

9) Exponentes radicales $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ si n es par $a \geq 0$

Ejercicios. Extraer factores del radical

$$1) \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^5} \quad 2) \sqrt{2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^4} \quad 3) \sqrt{3^5 \cdot 4^6 \cdot 7^7}$$

Hallar la raíz de

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
4) $\sqrt{1024}$	32	5) $\sqrt[5]{1024}$	4	6) $\sqrt{1728}$	$24\sqrt{3}$
7) $\sqrt{24336}$	156	8) $\sqrt{65536}$	256	9) $\sqrt[4]{65536}$	16
10) $\sqrt[3]{1728}$	12	11) $\sqrt[4]{6561}$	9	12) $\sqrt[6]{4096}$	4
13) $(\sqrt[4]{17})^4$	17	14) $(\sqrt[3]{8})^2$	4	15) $\sqrt[7]{(-4)^7}$	-4
16) $\sqrt[4]{(-5)^4}$	5	17) $\sqrt[4]{16^3}$	8	18) $\sqrt[5]{(-243)^2}$	9
19) $\sqrt[6]{8^4}$	4	20) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$	2	21) $\sqrt[7]{16384}$	4

Realizar las operaciones de radicales

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
22) $2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2}$	0	23) $3\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5}$	$-\sqrt[4]{5}$
24) $\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75}$	$9\sqrt{3}$	25) $\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[12]{64}$	$\sqrt{2}$
26) $2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27}$	$-8\sqrt{3}$	27) $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486}$	$6\sqrt{6}$
28) $2\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180}$	$11\sqrt{5}$	29) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$	$2\sqrt{3}$
30) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32}$	4	31) $\sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[3]{-4}$	2

32) $\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}}$	$\sqrt{2}$	33) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$	$\sqrt[6]{2}$
34) $\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}}$	$4\sqrt[3]{4}$	35) $\frac{\sqrt[3]{2000}}{\sqrt[3]{2}}$	10

Racionalizar

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
36) $\frac{15}{\sqrt{5}}$	$3\sqrt{5}$	37) $\frac{5}{2\sqrt{2}}$	$\frac{5\sqrt{2}}{4}$	38) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
39) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	$\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$	40) $\frac{2}{3\sqrt[5]{4}}$	$\frac{\sqrt[5]{8}}{3}$	41) $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Calcular el valor de las siguientes potencias

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
42) $27^{\frac{2}{3}}$	9	43) $16^{\frac{3}{2}}$	64	44) $8^{\frac{2}{3}}$	4
45) $81^{0.75}$	27	46) $125^{-\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{5}$	47) $9^{0.5}$	3
48) $729^{0.\bar{3}}$	9	49) $27^{0.\bar{6}}$	9	50) $8^{0.333\dots}$	2