INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

$$\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-3}=\frac{3x-9+4x+8}{x^2-x-6}=\frac{7x-1}{x^2-x-6}$$

Hay ocasiones donde es necesario invertir el proceso. Para ver cómo funciona en general el método de fracciones parciales, trabajaremos sobre una función racional.

$$f(x)=\frac{p(x)}{Q(x)} \quad \text{Donde } p(x) \quad \wedge \quad Q(x) \text{ son polinomios}$$

Las fracciones parciales se utilizan para ayudar a descomponer expresiones racionales y obtener sumas de expresiones más simples.

Es posible expresar *f* como una suma de fracciones más sencilla, siempre que el grado de *P* sea menor que el grado de Q. Esa función racional se llama propia.

CASO 1

Todos los factores de *Q(x)* son lineales y ninguno se repite. En este caso se escribe

$$\frac{p(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

Donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son constantes a determinar

Ejemplo 1: Determinar la descomposición en fracciones parciales de:

$$\frac{7x-1}{x^2-x-6}$$

1. Factorizar el denominador

$$x^2-x-6=(x+2)(x-3)$$

2. Colocar cada factor obtenido de la siguiente forma

$$\frac{7x-1}{x^2-x-6}=\frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}$$

Esta ecuación es válida para todo valor de *x* excepto $x=-2 \wedge x=3$

3. Obtener el mínimo común denominador (MCD), multiplicarlo a ambos lados de la igualdad y simplificar.

$7x-1=A(x-3)+B(x+2)$ Ecuación (1)

Esta ecuación es válida para todos los valores de *x*

4. Sustituir los valores de x encontrados anteriormente $x=-2 \wedge x=3$ en la ecuación (1).

Con **x = -2**

$$7x-1=A(x-3)+B(x+2)$$
$$7(-2)-1=A(-2-3)+B(-2+2)$$
$$-14-1=A(-5)+B(0)$$
$$-15=-5A$$
$$3=A$$

Con **x = 3**

$$7x-1 = A(x-3)+B(x+2)$$

$$7(3)-1 = A(3-3)+B(3+2)$$

$$20 = 5B \Rightarrow B = 4$$

Respuesta: $\boxed{\dfrac{7x-1}{x^2-x-6} = \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{4}{x-3}}$

<u>Ejemplo 2</u>. $\dfrac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}$

1. Factorizar el denominador

$$x^3+2x^2-3x = x\left(x^2+2x-3\right) = x(x+3)(x-1)$$

2. Colocar cada factor obtenido de la siguiente forma

$$\frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}$$

Esta ecuación es válida para todo valor de x excepto $x = 0, x = -3 \wedge x = 1$

3. Obtener el mínimo común denominador (MCD), multiplicarlo a ambos lados de la igualdad y simplificar.

$$4x^2+13x-9 = A(x+3)(x-1)+B(x)(x-1)+C(x)(x+3) \quad \text{Ecuación } (1)$$

Esta ecuación es válida para todos los valores de x

4. Sustituir los valores de x encontrados anteriormente $x = 0, x = -3 \wedge x = 1$ en la ecuación (1).

Con **x = 0**

$$4x^2+13x-9 = A(x+3)(x-1)+B(x)(x-1)+C(x)(x+3)$$

$$4(0)^2+13(0)-9 = A(0+3)(0-1)+B(0)(0-1)+C(0)(0+3)$$

$$-9 = -3A \Rightarrow A03$$

Con **x = -3**

$$4x^2+13x-9 = A(x+3)(x-1)+B(x)(x-1)+C(x)(x+3)$$

$$4(-3)^2+13(-3)-9 = A(-3+3)(-3-1)+B(-3)(-3-1)+C(-3)(-3+3)$$

$$-12 = 12B \Rightarrow B = -1$$

Con **x = 1**

$$4x^2+13x-9 = A(x+3)(x-1)+B(x)(x-1)+C(x)(x+3)$$

$$4(1)^2+13(1)-9 = A(1+3)(1-1)+B(1)(1-1)+C(1)(1+3)$$

$$8 = 4C$$

$$2 = C$$

Respuesta: $\boxed{\dfrac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{2}{x-1}}$

<u>Este método se aplica **únicamente** cuando los términos son lineales y no repetidos.</u>

CASO 2

Todos los factores de *Q(x)* son lineales y algunos se repiten. Se tiene $(ax+b)^n$ como factor *Q(x),* entonces se dice que $ax+b$ es un factor *n*-múltiple de *Q(x),* y a este factor le corresponderá la suma de *n* fracciones parciales. En este caso se escribe

$$\frac{p(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{(a_2x+b_2)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(a_nx+b_n)^n}$$

Ejemplo. Determinar la descomposición en fracciones parciales de: $\dfrac{x^2+10x-36}{x(x-3)^2}$

Como el denominador ya esta factorizado, entonces se coloca primero el término lineal x, luego el término repetido elevado a la 1 y por último el término repetido elevado al cuadrado, así:

$$\frac{x^2+10x-36}{x(x-3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

Operar el (MCD), multiplicarlo a ambos lados de la igualdad y simplificar.

$$x^2+10x-36 = A(x-3)^2 + B(x)(x-3) + C(x)$$

Operar los paréntesis

$$x^2+10x-36 = A(x^2-6x+9) + B(x^2-3x) + C(x)$$ Desarrollar el producto notable

$$x^2+10x-36 = Ax^2-6Ax+9A+Bx^2-3Bx+Cx$$ Multiplicar las letras con los paréntesis

Armar el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= A+B \\ 10 &= -6A-3B+C \\ -36 &= 9A \end{aligned}$$

Se obtiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. De la última ecuación podemos obtener el valor de *A*

$9A=-36$ $\qquad A=-4$

Al sustituir este valor en la primera ecuación obtenemos el valor de *B*

$-4+B=1$ $\qquad B=5$

Sustituyendo los valores de *A* y *B* en la segunda ecuación obtenemos el valor de *C*

$-6A-3B+C=10$

$24-15+C=10$

$C=1$

Respuesta $\boxed{\dfrac{x^2+10x-36}{x(x-3)^2} = \dfrac{-4}{x} + \dfrac{5}{x-3} + \dfrac{1}{(x-3)^2}}$

CASO 3

Todos los factores de *Q(x)* son lineales y cuadráticos y ninguno se repite. Al factor cuadrático ax^2+bx+c del denominador le corresponde la fracción parcial de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Ejemplo. Determinar la descomposición en fracciones parciales de: $\frac{x^2-x-5}{x^3+x^2-2}$

Se realiza división sintética en el denominador. El segundo término es irreductible y no se repite. Por eso es caso 3.

$$\frac{x^2-x-5}{(x-1)(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

Operar el (MCD), multiplicarlo a ambos lados de la igualdad y simplificar.

$$x^2-x-5=A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x-1)$$

Operar los paréntesis

$$x^2-x-5=Ax^2+2Ax+2A+Bx^2-Bx+Cx-C$$

Armar el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= A+B \\ -1 &= 2A-B+C \\ -5 &= 2A-C \end{aligned}$$

Se obtienen los valores de las constantes

$A=-1$ $\quad B=2$ $\quad C=3$

Respuesta $\boxed{\frac{x^2-x-5}{(x-1)(x^2+2x+2)}=-\frac{1}{x-1}+\frac{2x+3}{x^2+2x+2}}$

CASO 4

Todos los factores de $Q(x)$ son lineales y cuadráticos y algunos se repiten. Si ax^2+bx+c es un factor cuadrático de multiplicidad n de $Q(x)$ entonces el factor $(ax^2+bx+c)^n$ le corresponde la suma de las siguientes n fracciones parciales:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Ejemplo. Determinar la descomposición en fracciones parciales de: $\frac{3x^4-12x^3-4x^2+11x+4}{x(x^2-3x-2)^2}$

Como el denominador ya está factorizado, entonces se escribe

$$\frac{3x^4-12x^3-4x^2+11x+4}{x(x^2-3x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-3x-2}+\frac{Dx+E}{(x^2-3x-2)^2}$$

Operar el (MCD), multiplicarlo a ambos lados de la igualdad y simplificar.

$$3x^4-12x^3-4x^2+11x+4=A(x^2+2x+2)^2+(Bx+C)(x)(x^2+2x+2)+(Dx+E)(x)$$

Al operar los paréntesis y resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los valores de las constantes

$A=1$ $B=2$ $C=0$ $D=3$ $E=-1$

Respuesta $\boxed{\dfrac{3x^4-12x^3-4x^2+11x+4}{x(x^2-3x-2)^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x^2-3x-2}+\dfrac{3x-1}{(x^2-3x-2)^2}}$

Resolver los siguientes ejercicios

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1. $\int \frac{8x-1}{(x-2)(x+3)}dx$	$3\ln\lvert x-2\rvert+5\ln\lvert x+3\rvert+c$	2. $\frac{x-29}{(x-4)(x+1)}$	$-5\ln\lvert x-4\rvert+6\ln\lvert x+1\rvert+c$
3 $\int \frac{5x-12}{x^2-4x}dx$	$3\ln\lvert x\rvert+2\ln\lvert x-4\rvert+c$	4. $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx$	$3\ln\lvert x+2\rvert+2\ln\lvert x-2\rvert+c$
5. $\frac{x+34}{x^2-4x-12}$	$5\ln\lvert x-6\rvert-4\ln\lvert x+2\rvert+c$	6. $\int \frac{x^2+19x+20}{x^3-3x^2-10x}dx$	$-2\ln\lvert x\rvert+4\ln\lvert x-5\rvert-\ln\lvert x+2\rvert$
7. $\int \frac{4x^2-5x-15}{x^3-4x^2-5x}dx$	$3\ln\lvert x\rvert+2\ln\lvert x-5\rvert-\ln\lvert x+1\rvert+c$	8. $\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx$	$\ln\lvert x\rvert+\frac{3}{4}\ln\lvert 2x+1\rvert-\frac{1}{4}\ln\lvert 2x-1\rvert$
9. $\int \frac{2x^2+13x+18}{x^3-3x^2-18x}dx$	$-\ln\lvert x\rvert+\frac{28}{9}\ln\lvert x-6\rvert-\frac{1}{9}\ln\lvert x+3\rvert$	10. $\int \frac{4x^2-15x-1}{x^3-2x^2-5x+6}dx$	$2\ln\lvert x-1\rvert-\ln\lvert x-3\rvert+3\ln\lvert x+2\rvert$
11 $\int \frac{5x^2-4}{x^2(x+2)}dx$	$\ln\lvert x\rvert+\frac{2}{x}+4\ln\lvert x+2\rvert+c$	12 $\int \frac{2x+3}{(x-1)^2}dx$	$2\ln\lvert x-1\rvert-\frac{5}{x-1}+c$
13. $\int \frac{x-3}{x^3+x^2}dx$	$4\ln\lvert x\rvert+\frac{3}{x}-4\ln\lvert x+1\rvert+c$	14 $\int \frac{19x^2+50x-25}{3x^3-5x^2}dx$	$-7\ln\lvert x\rvert-\frac{5}{x}+\frac{40}{3}\ln\lvert 3x-5\rvert+c$
15. $\int \frac{10-x}{x^2+10x+25}dx$	$-\ln\lvert x+5\rvert-\frac{15}{x+5}+c$	16.- $\int \frac{4w-11}{2w^2+7w-4}dw$	$-\ln\lvert 2w-1\rvert+3\ln\lvert w+4\rvert+c$
17. $\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}dx$	$\frac{1}{x}+3\ln\lvert x-1\rvert+c$	18. $\int \frac{x}{x^2+6x+8}dx$	$2\ln\lvert x+4\rvert-\ln\lvert x+2\rvert+c$
19. $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$	$-\frac{1}{2}\ln\lvert x-1\rvert-\frac{4}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\lvert x+1\rvert$	20. $\int \frac{x}{x^2+5x+6}dx$	$-2\ln\lvert x+2\rvert+3\ln\lvert x+3\rvert+c$
21. $\int \frac{x}{x^2+7x+10}dx$	$-\frac{2}{3}\ln\lvert x+2\rvert+\frac{5}{3}\ln\lvert x+5\rvert+c$	22. $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$	$2\ln\lvert x\rvert+\frac{1}{10}\ln\lvert 2x-1\rvert-\frac{1}{10}\ln\lvert x+2\rvert$
23 $\int \frac{6x^2+22x-23}{(2x-1)(x^2+x-6)}dx$	$\ln\lvert 2x-1\rvert-\ln\lvert x+3\rvert+3\ln\lvert x-2\rvert$	24. $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6}dx$	$\frac{7}{5}\ln\lvert x+2\rvert+\frac{8}{5}\ln\lvert x-3\rvert+c$
25 $\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}dx$	$-\ln\lvert x\rvert-\frac{1}{2}\ln\lvert x+1\rvert+\frac{2}{3}\ln\lvert x-3\rvert$	26 $\int \frac{x-11}{x^2+3x-4}dx$	$3\ln\lvert x+4\rvert-2\ln\lvert x-1\rvert+c$
27 $\int \frac{3x-13}{x^2+3x-10}dx$	$4\ln\lvert x+5\rvert-\ln\lvert x-2\rvert+c$	28 $\int \frac{17x-3}{3x^2+x-2}dx$	$\frac{5}{3}\ln\lvert 3x-2\rvert+4\ln\lvert x+1\rvert+c$
29 $\int \frac{2x+21}{2x^2+9x-5}dx$	$2\ln\lvert 2x-1\rvert-\ln\lvert x+5\rvert+c$	30. $\int \frac{x^2+11}{x^3-3x^2-9x-5}dx$	$\ln\lvert x-5\rvert+\frac{2}{x+1}+c$
31 $\int \frac{3x-7}{4x^2+3x-1}dx$	$-\frac{5}{4}\ln\lvert 4x-1\rvert+2\ln\lvert x+1\rvert+c$	32. $\int \frac{x}{(x-3)^2}dx$	$\ln\lvert x-3\rvert-\frac{3}{x-3}+c$

33. $\int \frac{2}{x^2+3x}dx$	$\frac{2}{3}\ln\lvert x\rvert-\frac{2}{3}\ln\lvert x+3\rvert+c$	34 $\int \frac{3}{x^2-1}dx$	$-\frac{3}{2}\ln\lvert x+1\rvert+\frac{3}{2}\ln\lvert x-1\rvert+c$
35. $\int \frac{5x}{2x^3+6x^2}dx$	$\frac{5}{6}\ln\lvert x\rvert-\frac{5}{6}\ln\lvert x+3\rvert+c$	36. $\int \frac{x+1}{(x-3)^2}dx$	$\ln\lvert x-3\rvert-\frac{4}{x-3}+c$
37. $\int \frac{5x+7}{x^2+4x+4}dx$	$5\ln\lvert x+2\rvert+\frac{3}{x+2}+c$	38 $\int \frac{3x+2}{x^3+3x^2+3x+1}dx$	$\frac{-3}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}+c$
39. $\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$	$6\ln\lvert x\rvert-\ln\lvert x+1\rvert-\frac{9}{x+1}+c$	40. $\int \frac{1}{9x^4-x^2}dx$	$\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\ln\lvert 3x+1\rvert+\frac{3}{2}\ln\lvert 3x-1\rvert+c$
41. $\int \frac{1}{9x^4+x^2}dx$	$-\frac{1}{x}-3\tan^{-1}3x+c$	42. $\int \frac{x^2+12}{x^2+4}dx$	$x+4\tan^{-1}\frac{x}{2}+c$
43. $\int \frac{2x^2-3x-36}{(2x-1)(x^2+9)}dx$	$-2\ln\lvert 2x-1\rvert-\frac{3}{2}\ln\lvert x^2+9\rvert+c$	44. $\int \frac{x^3-4x}{(x^2+1)^2}dx$	$\frac{1}{2}\ln\lvert x^2+1\rvert+\frac{5}{2(x^2+1)}+c$
45. $\int \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}dx$	$\ln\lvert x-1\rvert+\tan^{-1}x+c$	46 $\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}dx$	$2\ln\lvert x+2\rvert-\tan^{-1}(x+1)+c$
47. $\int \frac{4+5x^2}{x^3+4x}dx$	$\ln\lvert x\rvert+2\ln\lvert x^2+4\rvert+c$	48. $\int \frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2}dx$	$4\ln\lvert x^2+2\rvert+\frac{3}{2(x^2+2)}+c$
49. $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$	$\frac{1}{2}\ln\lvert x^2+1\rvert+\frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c$	50. $\int \frac{x^2-x-2}{x^3-2x-4}dx$	$\frac{1}{2}\ln\lvert x^2+2x+2\rvert+c$

51. $\int \frac{2x^2+x-8}{x^3+4x}dx$	$-2\ln\lvert x\rvert+2\ln\lvert x^2+4\rvert+\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$
52. $\int \frac{1}{x^4-16}dx$	$\frac{1}{32}\ln\lvert x-2\rvert-\frac{1}{32}\ln\lvert x+2\rvert-\frac{1}{16}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$
53. $\int \frac{x+4}{x^3+4x}dx$	$\ln\lvert x\rvert-\frac{1}{2}\ln\lvert x^2+4\rvert+\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$
54. $\int \frac{1}{16x^4-1}dx$	$\frac{1}{8}\ln\lvert 2x-1\rvert-\frac{1}{8}\ln\lvert 2x+1\rvert-\frac{1}{4}\tan^{-1}2x+c$
55. $\int \frac{x}{x^3+2x^2+x+2}dx$	$-\frac{2}{5}\ln\lvert x+2\rvert+\frac{1}{5}\ln\lvert x^2+1\rvert+\frac{1}{5}\tan^{-1}x+c$
56. $\int \frac{x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}dx$	$\frac{1}{2}\ln\lvert x+1\rvert+\frac{1}{4}\ln\lvert x^2+1\rvert+\frac{5}{2}\tan^{-1}x+c$
57. $\int \frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)}dx$	$2\ln\lvert x\rvert-2\ln\lvert x-1\rvert+\ln\lvert x^2+4\rvert+2\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$
58. $\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}dx$	$\ln\lvert x-1\rvert-\frac{1}{2}\ln\lvert x^2+9\rvert-\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+c$
59. $\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x}dx$	$2\ln\lvert x\rvert-\frac{1}{2}\ln\lvert x^2+3\rvert-\frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+c$
60. $\int \frac{x^2-x-5}{x^3+x^2-2}dx$	$-\ln\lvert x-1\rvert+\ln\lvert x^2+2x+2\rvert+\tan^{-1}(x+1)+c$