FUNCIONES

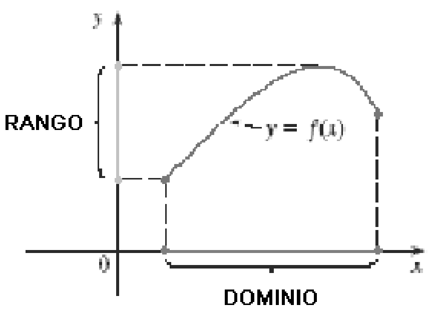
En la vida diaria, el valor de muchas variables, depende del valor de otras.
El salario depende del número de horas trabajadas, la producción total depende del número de máquinas utilizadas, la distancia recorrida depende del tiempo transcurrido y el área del círculo depende del radio.
La relación entre este tipo de actividades, se expresa mediante una función.

Definición: Una función $"f"$ es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A, exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B.

El conjunto A se denomina dominio de la función. El número $f(x)$ es el valor de f en x y se lee "f de x". El rango de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$, conforme x varia en todo el dominio.
"x" se denomina variable independiente. Toma valores arbitrarios.
"y" se denomina variable dependiente.

Dominio: es el conjunto de todos los valores admisibles para x
Rango: es el conjunto de todos los valores resultantes de y

La forma más común para visualizar una función es mediante su gráfica. La gráfica es el conjunto de pares ordenados.



Determinar el dominio de las siguientes expresiones

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $-x^2-6x-3$	$(-\infty,\infty)$	2) x^2+5x-3	$(-\infty,\infty)$	3) $\frac{x^2-1}{x+1}$	$R-\{-1\}$
4) $\frac{3x-5}{x+2}$	$R-\{-2\}$	5) $\frac{y^2-5y-3}{2y^2+5y+3}$	$R-\left\{-1,-\frac{3}{2}\right\}$	6) $\frac{3x^2+4x-3}{2x^2-7x+6}$	$R-\left\{2,\frac{3}{2}\right\}$
7) $\frac{5x}{x^2+1}$	$(-\infty,\infty)$	8) $\frac{2t}{3t-2}$	$R-\left\{\frac{2}{3}\right\}$	9) $\frac{5x}{x^2-1}$	$R-\{-1,1\}$
10) $\frac{5x}{x^3-1}$	$R-\{1\}$	11) $\sqrt{x+2}$	$[-2,\infty)$	12) $\sqrt{x-5}$	$[5,\infty)$
13) $\frac{1}{\sqrt{x+2}}$	$(-2,\infty)$	14) $\frac{1}{\sqrt{x-5}}$	$(5,\infty)$	15) $\sqrt{x^2-4}$	$(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$
16) $\sqrt{4-x^2}$	$[-2,2]$	17) $\frac{x}{\sqrt[4]{9-x^2}}$	$(-3,3)$	18) $\frac{t}{\sqrt[3]{t+1}}$	$R-\{-1\}$

19) $\sqrt{x^2+10x+25}$	$(-\infty,\infty)$	20) $\sqrt{x^2-3x-28}$	$(-\infty,-4]\cup[7,\infty)$	21) $\sqrt{x^2-2x-8}$	$(-\infty,-2]\cup[4,\infty)$

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Si f es una función con dominio A entonces la gráfica de f es el conjunto de pares ordenados $\{x, f(x)/x\in A\}$

En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x,y) tales que $y=f(x)$

Gráfica de una función trazando puntos

Trace la gráfica de las siguientes funciones y diga su dominio y su rango.

1) $f(x)=x$ 2) $f(x)=3x-2$ 3) $f(x)=x+5$

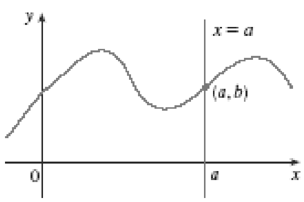
4) $f(x)=x^2+3$ 5) $f(x)=-x^2+1$ 6) $f(x)=5$

7) $f(x)=-x$ 8) $g(x)=x^2+2x+1$ 9) $f(x)=x^2-1$

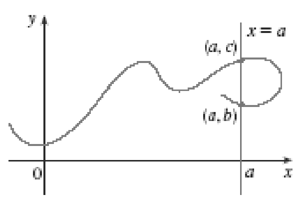
10) $f(x)=-3x^2-2$ 11) $f(x)=3x^2-5$ 12) $h(x)=\sqrt{x-4}$

Prueba de la recta vertical.

Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si y sólo si, ninguna recta vertical se interseca con la curva más de una vez



Es función



No es función

Simetría de una gráfica

Algunas veces podemos reducir a la mitad el trabajo de graficar, si conocemos ciertas simetrías de la gráfica.

Si una función f satisface $f(-x)=f(x)$ para todo x en su dominio, entonces f se denomina **función par**

Ejemplo $f(x)=x^2$ es función par.

$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$

El significado geométrico de una función par es que su gráfica es simétrica con respecto al eje y

Si una función f satisface $f(-x)=-f(x)$ para todo x en su dominio, entonces f se denomina **función impar**

Ejemplo $f(x)=x^3$ es función impar.

$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$

El significado geométrico de una función impar es que su gráfica es simétrica con respecto al origen

Intercepto con los ejes coordenados

Existen dos puntos importantes al trazar la gráfica de una función, llamados interceptos.
El intercepto con el eje x es el punto donde la gráfica corta el eje x. Para hallarlo se hace $f(x)=0$ y se despeja x
El intercepto con el eje y es el punto donde la gráfica corta el eje y. Para hallarlo se reemplaza la variable x por 0 y se despeja y.

Dibujar las gráficas de las ecuaciones. Determinar las intersecciones con los ejes y examinar posibles simetrías.

1) $y = x + 3$ 2) $y = \frac{x}{2} - 4$ 3) $y = 1 - x^2$

4) $y = (x+2)^2$ 5) $x^2 + y^2 = 4$ 6) $-x^3 + y = 2$

7) $y - x = -2x^2 + 1$ 8) $x^2 y - x^2 + 4y = 0$ 9) $x^2 y - x^2 + 4y = 0$

Función valor absoluto

Trace la gráfica de la función $f(x) = |x|$ y halle su dominio y su rango.

FUNCIONES POR TRAMOS Y SUS GRÁFICAS

Trace la gráfica de cada función y diga su dominio y su rango.

1. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & Si \quad x \leq 1 \\ x^2 & Si \quad x > 1 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & Si \quad x \geq -1 \\ 1 - x & Si \quad x < -1 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & Si \quad x < 1 \\ x^2 & Si \quad 1 \leq x \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 2 & Si \quad x \leq -1 \\ x^2 & Si \quad x \geq -1 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & Si \quad x < 3 \\ 5 & Si \quad x = 3 \\ 2x + 1 & Si \quad 3 < x \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 4 & Si \quad x < -2 \\ x^2 & Si \quad -2 \leq x \leq 2 \\ -x + 6 & Si \quad 2 < x \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & Si \quad x < -1 \\ x^2 & Si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & Si \quad 1 < x \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & Si \quad x > 3 \\ x^2 - 2 & Si \quad x = 2 \\ 2x + 3 & Si \quad x < -2 \end{cases}$

9. $f(t)=\begin{cases} 1 & Si \quad t\le 0 \\ t+1 & Si \quad 0<t<2 \\ t^2-1 & Si \quad t\ge 2 \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} 2 & Si \quad x<-2 \\ \sqrt{4-x^2} & Si \quad -2\le x\le 2 \\ -2 & Si \quad 2<x \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} x+3 & Si \quad x<-5 \\ \sqrt{25-x^2} & Si \quad -5\le x\le 5 \\ 3-x & Si \quad 5<x \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} x+2 & Si \quad x\le -4 \\ \sqrt{16-x^2} & Si \quad -4<x<4 \\ 2-x & Si \quad 4\le x \end{cases}$

FUNCIONES POLINÓMICAS

Una función P recibe el nombre de polinómica Sí:

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde n es un entero no negativo y los números a_0 a_1 a_2 a_{n-1} y a_n son constantes llamadas coeficientes del polinomio.

El dominio de cualquier polinomio son todos los reales y el grado del polinomio es n

FUNCIÓN LINEAL Y APLICACIONES

La función lineal es una función de la forma $f(x)=ax+b$. Es un polinomio de primer grado y su gráfica es una línea recta. $f(x)=y=mx+b$ Donde m es la pendiente y b el intercepto con el eje y

1) Escriba y grafique la ecuación de la recta que:
   a) Pasa por los puntos (4, 3) y (3, 1)
   b) Pasa por los puntos (-2, 3) y (3, -2)
   c) Pasa por los puntos (2, 3) y (2, 5)
   d) Pasa por los puntos (2, -3) y (12, -5)
   e) Pasa por los puntos (-7, 5) y (6, -5)
   f) Pasa por los puntos (-4, 3) y (-4, -5)
   g) Pasa por el punto (2, -1) y tiene pendiente -3
   h) Pasa por el punto (-2, -1) y tiene pendiente 4
   i) Pasa por el punto (2, -1) y tiene pendiente 0
   j) Pasa por el punto (3, -5) y tiene pendiente 3

2) Encuentre la expresión lineal que se asocia al ingreso por la venta de cierto número de artículos, si se sabe que por la venta de 40 artículos ingresaron $4.500 y por la venta de 15 artículos el ingreso fue de $2.000

3) Un negocio produce n artículos al mes con una ganancia por unidad de $500 en cada uno y tiene gastos fijos por $200 000 mensuales. Escriba la ecuación de la utilidad, en términos del número de artículos producidos, grafique la función de la utilidad, y haga un análisis del negocio con base en la gráfica.

4) El gerente de una fábrica de muebles encuentra que cuesta 2.200 dólares fabricar 100 sillas en un día y 4.800 dólares por manufacturar 300 sillas diarias.
   a) Exprese el costo como función del número de sillas producidas bajo el supuesto de que es lineal. Trace la gráfica.
   b) ¿Qué valor tiene la pendiente y qué representa?
   c) ¿Cuál es la ordenada al origen de la gráfica y que representa?

5) The monthly cost of driving a car depends on the number of miles driven. Lynn found that in May it cost her \$380 to drive 480 mi and in June it cost her \$460 to drive 800 mi.
   a) Express monthly cost C as a function of the distance driven d assuming that a linear relationship gives a suitable model.
   b) Use part (a) to predict the cost of driving 1500 miles per month.
   c) Draw the graph of the linear function. What does the slope represent?
   d) What does the y-intercept represent?
   e) Why does a linear function give a suitable model in this situation?

6) Biologists have noticed that the chirping rate of crickets of a certain species is related to temperature, and the relationship appears to be very nearly linear. A cricket produces 113 chirps per minute at 70°F and 173 chirps per minute at 80° F.
   a) Find a linear equation that models the temperature T as a function of the number of chirps per minute N.
   b) What is the slope of the graph? What does it represent?
   c) If the crickets are chirping at 150 chirps per minute, estimate the temperature.

7) At surface of the ocean, the water pressure is the same as the air pressure above the water, 15 lb/in^2. Below the surface, the water pressure increases by 4.34 lb/in^2 for every 10 Ft of descent.
   a) Express the water pressure as a function of the depth below the ocean surface.
   b) At what depth is the pressure 100 lb/in^2? (1 Ft= 12 in)

8) Un fabricante compra una maquinaria por valor de \$4.000.000. Esta se deprecia linealmente, de manera que después de 8 años su valor comercial será \$800.000. De acuerdo con esta información responda las siguientes preguntas:
   a) Expresar el valor de la maquinaria como una función de su antigüedad y dibujar la gráfica.
   b) Calcular el valor de la maquinaria después de 3 años y 4 meses.
   c) ¿Cuánto se deprecia anualmente?
   d) ¿Cuándo se depreciará totalmente esta maquinaria?

9) La temperatura medida en grados Farenheit (°F) tiene un cambio constante en relación con la temperatura medida en grados Celsius (°C). Si se sabe que 0°C son equivalentes a 32 °F y 100 °C son equivalentes a 212 °F
   a) Hallar un modelo matemático que describa la relación entre °F y °C
   b) Convertir -15 °C a °F
   c) Convertir 68 °F a °C

10) Entre 1980 y 2008, un coleccionista de libros raros compra libros para su colección a una tasa constante por año si en 1980 tenía 420 libros en 2000 tenía 1220 libros. Determinar:
   a) Una función que relacione el número de libros por año.
   b) Calcule la cantidad de libros que tenía el coleccionista en 1993
   c) En qué año tiene el coleccionista 1380 libros.

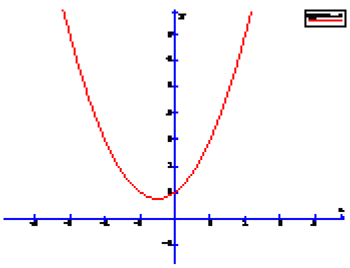
11) Un fabricante compra una maquinaria por valor de $10.000.000. Esta se deprecia linealmente, de manera que después de 4 años su valor comercial será $1.400.000. De acuerdo con esta información responda las siguientes preguntas:

a) Expresar el valor de la maquinaria como una función de su antigüedad y dibujar la gráfica.
b) Calcular el valor de la maquinaria después de 5 años.
c) ¿Cuándo se depreciará totalmente esta maquinaria
d) ¿Cuánto se deprecia anualmente?

FUNCIÓN CUADRÁTICA Y APLICACIONES

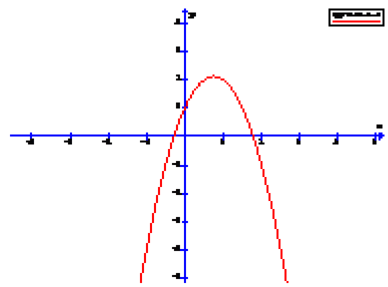
Es la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ Polinomio de grado dos y su gráfica es una parábola

$f(x) = x^2 + x + 1$



Si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba

$f(x) = -2x^2 + 3x + 1$

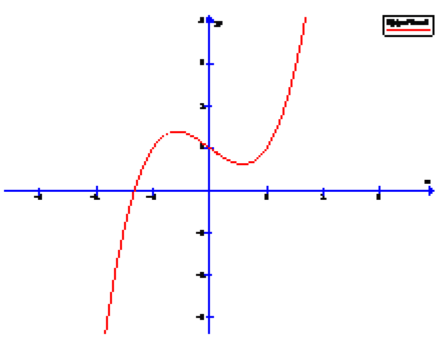


Si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo

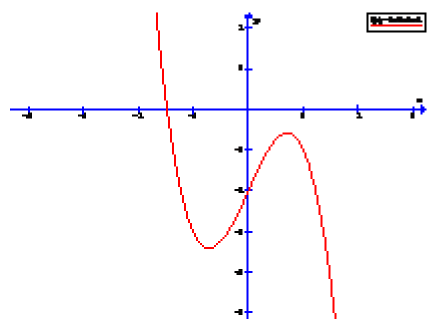
<u>Función cúbica</u>

Es la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ Polinomio de grado tres

$f(x) = x^3 - x + 1$

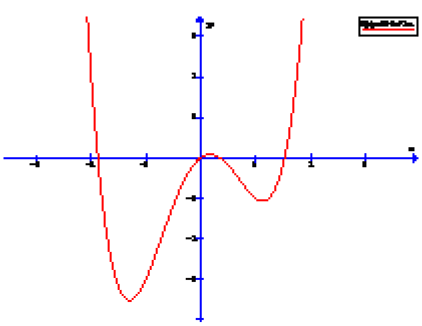


$f(x) = -2x^3 + 3x - 2$



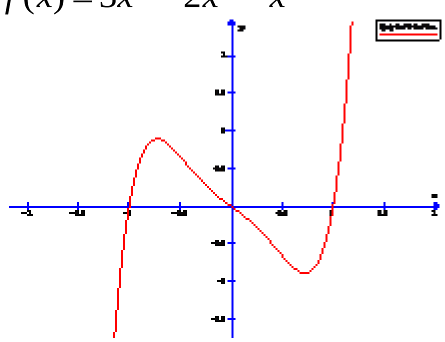
Polinomio de grado 4

$f(x) = x^4 - 3x^2 + x$



Polinomios de grado 5

$f(x) = 3x^5 - 2x^3 - x$

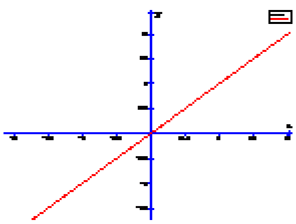


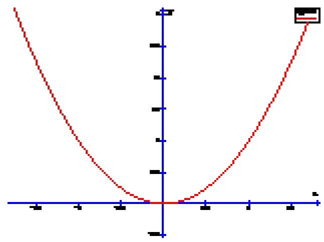
FUNCIONES POTENCIA

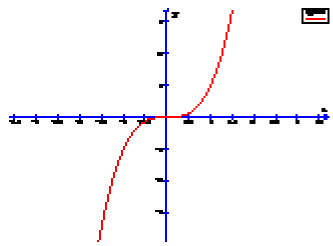
Una función de la forma $f(x)=x^a$ donde $a=$constante, se llama función potencia, tenemos varios casos.

1) $\underline{a=n}$ donde $n=$ entero positivo

$f(x)=x$ $f(x)=x^2$ $f(x)=x^3$







Función identidad

Si n es par, la gráfica es semejante a $y=x^2$

Si n es impar, la gráfica es semejante a $y=x^3$

2) $\underline{a=\frac{1}{n}}$ donde $n=$ entero positivo

La función $f(x)=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ es una función raíz

Si $\underline{n=2}$ es la función raíz cuadrada $f(x)=\sqrt{x}$ con Dom $=[0,\infty)$ y la gráfica es la mitad superior de la parábola $x=y^2$

Para otros valores de n pares, la gráfica $y=\sqrt[n]{x}$ es similar a la de $y=\sqrt{x}$.

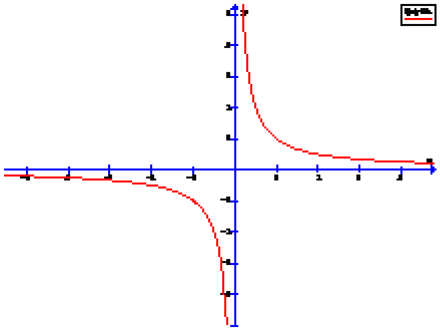
Si $\underline{n=3}$ es la función raíz cúbica $f(x)=\sqrt[3]{x}$ con Dom = $(-\infty,\infty)$

Para otros valores de n impares, la gráfica $y=\sqrt[n]{x}$ es similar a la de $y=\sqrt[3]{x}$

3) $\underline{a=-1}$

La función $f(x)=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$ es la función inversa

La gráfica de la función $y=\dfrac{1}{x}$ o $yx=1$ es una hipérbola con sus ejes de coordenadas como asintotas

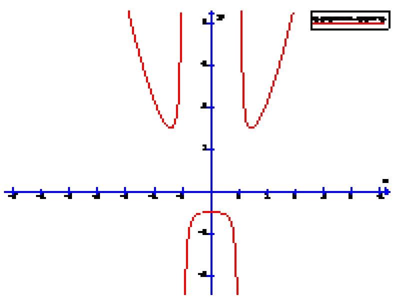


FUNCIONES RACIONALES

Una función racional f es una razón de dos polinomios

$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ Donde P y Q son polinomios El Dominio son todos los valores de x tales que $Q(x)\neq 0$

$$f(x)=\frac{2x^4-x^2+1}{x^2-4}$$



Ejercicios

1.) Las recientes tasas (en porcentajes) de inflación en Colombia vienen dadas por la función donde t representa el número de años desde 1987. de acuerdo con esta información $I(t)=4t^2-48t+154$

a) ¿En qué año la tasa de inflación será mínima
b) ¿Cuál es la tasa mínima de inflación?
c) ¿Cuál es la tasa de inflación de 1987?

2.) El consumo mundial de petróleo en millones de barriles viene dado por el modelo matemático $C(x)=-0.1x^2+2x+58$ donde x es el número de años desde 1985 (1985 corresponde a cero). De acuerdo con este modelo

a) ¿En qué año se alcanzará el consumo máximo?
b) ¿Cuál será el consumo máximo?
c) ¿Cuál será el consumo en 1985?

3.) Durante el festival de cine de Cartagena la asistencia, en un día cualquiera, a las funciones, en cierto teatro, estuvo representada por el modelo $A(t)=-2t^2+16t+50$, donde $A(t)$ representa el número de personas asistentes al teatro y t el tiempo trascurrido (en horas), a partir de las 11:00 a.m., hora en que abrió el teatro. De acuerdo a esta información, determinar

a) ¿Cuántas personas había en el teatro a las 11:00 am?

b) ¿Cuál fue la asistencia máxima al teatro en ese día?
c) ¿A qué hora se presentó la máxima asistencia?

4.) Los ingresos mensuales de un fabricante de zapatos están dados por la función $I(z) = -2z^2 + 1000z$ donde *z* es la cantidad de pares de zapatos que fabrica en el mes.
a) ¿Qué cantidad de pares de zapatos debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?
b) ¿Cuál es el máximo ingreso?
c) ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican 125 pares de zapatos?

5.) En una isla se introdujeron algunas iguanas. Al principio se reprodujeron rápidamente, pero los recursos de la isla comenzaron a escasear y la población decreció. El número de iguanas a los *t* años de haberlas dejado en la isla está dado por $I(t) = -t^2 + 22t + 122$
a) ¿A los cuantos años la cantidad de iguanas es máximo?
b) ¿Cuál es la máxima cantidad de iguanas que hubo en la isla?
c) ¿Cuántas iguanas se introdujeron inicialmente en la isla?

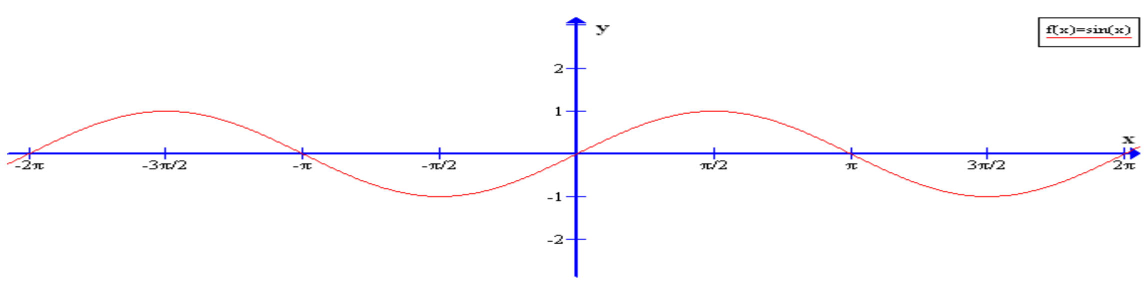
6.) Si el número de turistas que hace un recorrido en autobús a una ciudad es exactamente 30 (30 es el cero). El ingreso de una empresa de turismo en dicho recorrido cuando el número de personas es más de 30, esta dado por la función $I(n) = 600 + 5n - 0.5n^2$ donde n es el número de personas adicionales que hacen el recorrido
a) ¿Cuál es el número de turistas que debe llevar un autobús para maximizar los ingresos de la empresa?
b) ¿Cuánto es el ingreso máximo

7.) La altura $H(t)$ en metros, de una pelota lanzada verticalmente hacia arriba, *t* segundos después del lanzamiento está dada por $H(t) = 36 - 2t^2$
a) ¿Cuánto se demora la pelota en alcanzar la altura máxima?
b) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza la pelota?
c) ¿Cuánto se demora la pelota en llegar nuevamente al suelo?

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Función seno $F(x) = senx$ Dom = $(-\infty, \infty)$

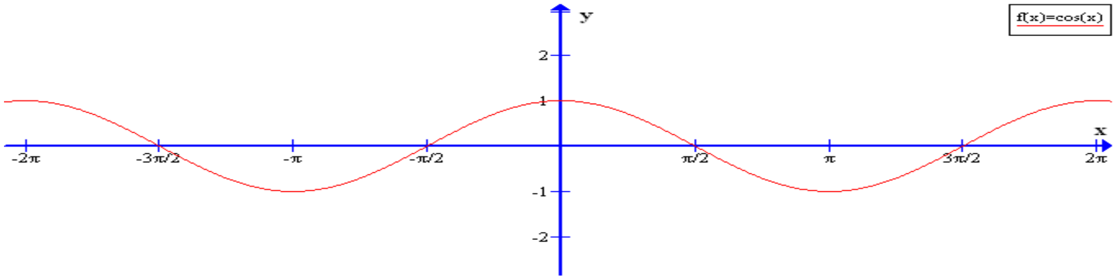
x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$senx$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0



Función coseno $F(x) = \cos x$ Dom = $(-\infty, \infty)$

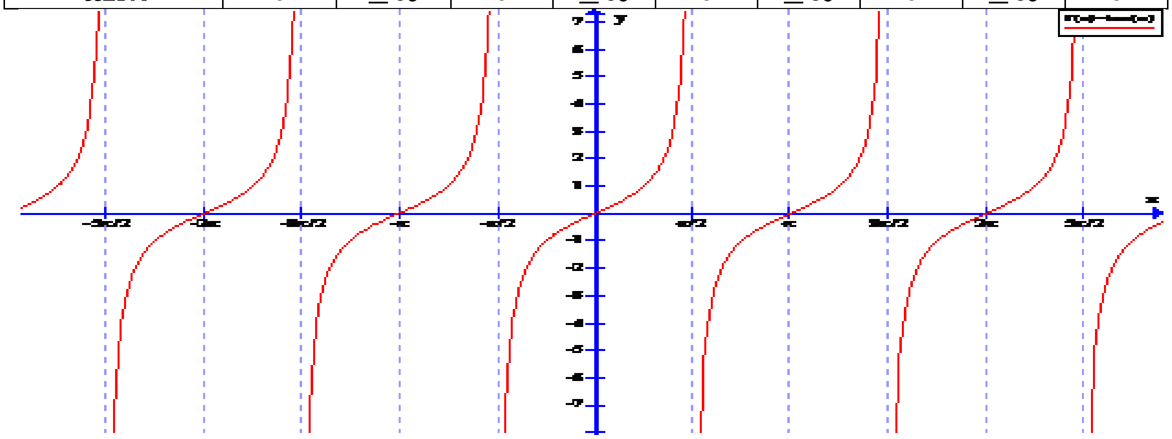
x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

$\cos x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1



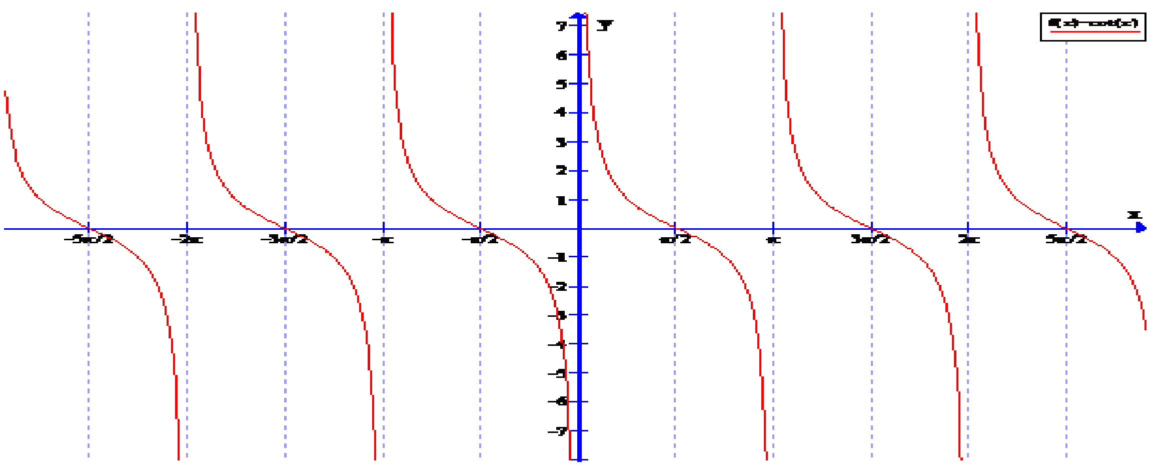
Función tangente $F(x)=\tan x$ Dom = $\Re-(2n+1)\pi/2$ con $n\in z$

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\tan x$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0



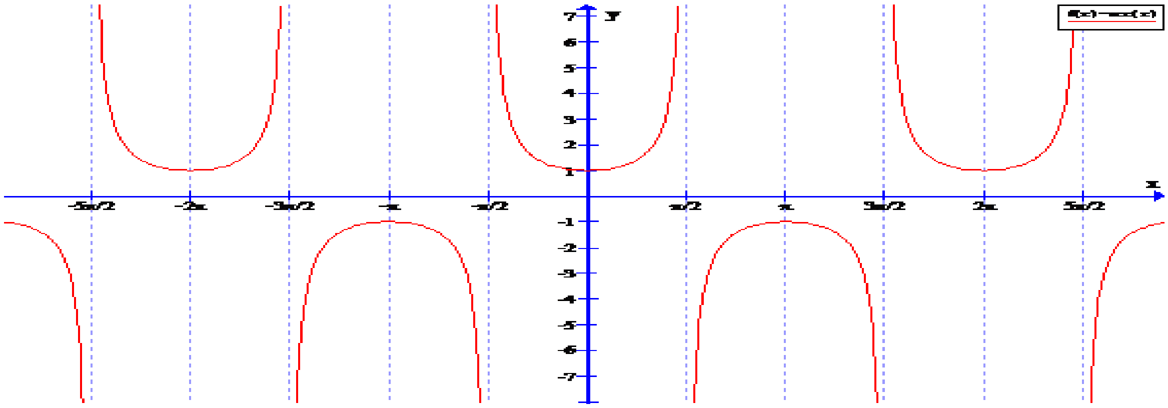
Función cotangente $F(x)=\cot x$ Dom = $\Re-(2n)\pi/2$ con $n\in z$

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cot x$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$



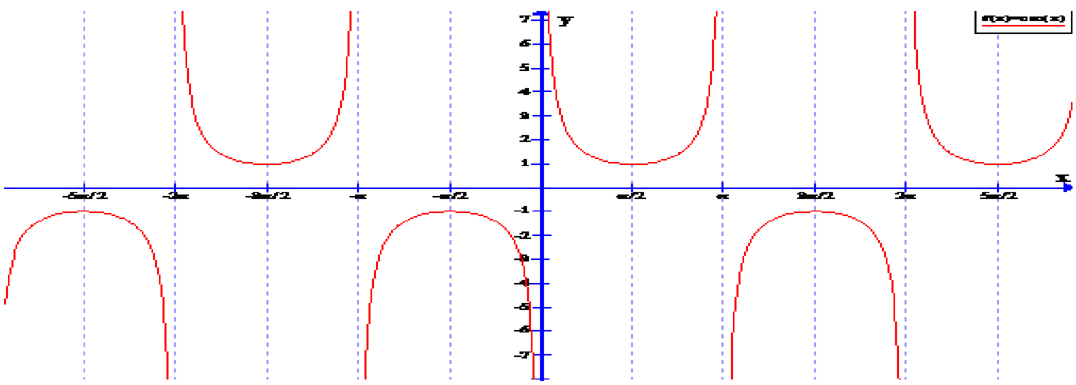
Función secante $F(x)=\sec x$ Dom = $\Re-(2n+1)\pi/2$ con $n\in z$

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sec x$	1	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$	1



Función cosecante $F(x)=\cos x$ Dom = $\Re-(2n)\pi/2$ con $n\in z$

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\csc x$	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$



Ejercicios

Trazar la gráfica de las siguientes funciones

1. $F(x)=sen2x$
2. $F(x)=1-sen2x$
3. $F(x)=1+2\cos x$
4. $F(x)=\cos x\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$
5. $F(x)=\cos 2x$
6. $F(x)=sen2\pi x$
7. $F(x)=3\cos 2x$
8. $F(x)=sen\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$
9. $F(x)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$
10. $F(x)=sen\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

FUNCIÓN EXPONENCIAL

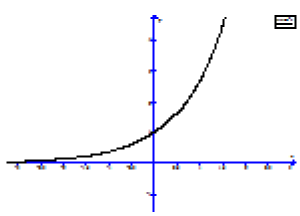
Se presentan dos funciones de gran importancia en la matemática, como son: la función exponencial y la función logarítmica.

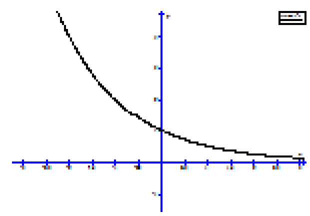
Definición: Sea a un número real positivo. La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x se llama **función exponencial de base a y exponente x.**

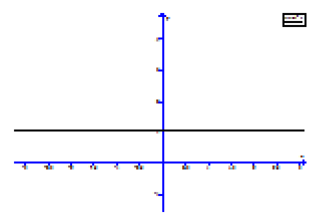
Cuando $a>1$ .Es decir, cuando la base a es mayor que 1, la función exponencial es estrictamente creciente en su dominio.

Cuando $0<a<1$ la función exponencial es estrictamente decreciente en su dominio.

Cuando $a=1$ la función exponencial es constante en su dominio.







$a>1$ $\quad\quad$ $0<a<1$ $\quad\quad$ $a=1$

Trazar la gráfica de las siguientes funciones

11.) $f(x)=2^x$ $\quad\quad$ 12.) $f(x)=3-2^x$

13.) $f(x)=1+3^x$ $\quad\quad$ 14.) $f(x)=-2^x$

Algunas funciones exponenciales se utilizan con mayor frecuencia que otras. Una especialmente importante es la que corresponde a la expresión

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ Cuando n se hace grande

Esta función se escribe como $f(x)=e^x$ cuya base es el número $e=2{,}718281.....$

Definición: la función exponencial natural es la función $f(x)=e^x$ con base e conocida como función exponencial

Trace la gráfica de la función $f(x)=e^{-x}$

Función uno a uno: Se dice que una función es uno a uno si cada número de su rango corresponde a exactamente un número de su dominio

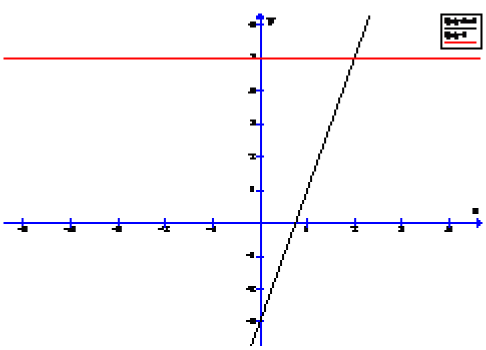
$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \text{ sólo cuando } x_1 = x_2$$

Ejemplo: La función $f(x) = x^2$ no es uno a uno porque 3 y -3 son dos números de su dominio que corresponden a un solo número de su rango.

Criterio de la recta horizontal: Una función es uno a uno si y sólo si cada recta horizontal, interfecta la gráfica a lo más en un punto

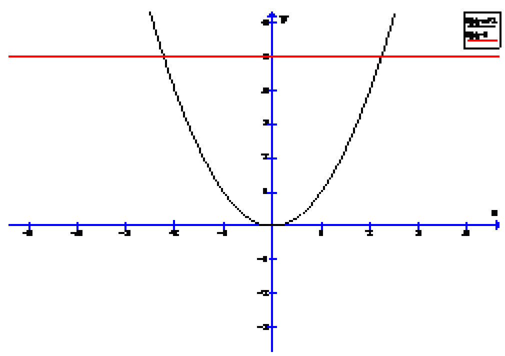
Ejemplo:

$f(x) = 4x - 3$



Función uno a uno

$f(x) = x^2$



No es función uno a uno

Para toda función uno a uno existe la función f^{-1} (función inversa)

Entonces toda función exponencial $f(x) = a^x$ con $a > o$ y $a \neq 1$ es una función uno a uno y por lo tanto tiene inversa. La función inversa f^{-1} se conoce como función logaritmo con base a y se denota como $\log_a$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

Definición: sea a un número positivo, con $a \neq 1$. La función logaritmo con base a, denotada por $\log_a$, se define como

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Es decir que $\log_a$ es el exponente al cual debe elevarse la base a para obtener a x

El dominio de la función logarítmica es el conjunto de los números reales positivos y el rango son todos los reales. La función siempre pasa por el punto $(0,1)$ y nunca toca el eje vertical. Además crece si $a > o$ y decrece si $0 < a < 1$

Leyes de los logaritmos.

1.) $\log_a(xy) = Log_a x + \log_a y$

2.) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = Log_a x - \log_a y$

3.) $\log_a\left(x^r\right) = rLog_a x$ donde r es cualquier número real.

Los logaritmos que tienen como base el número e se llaman logaritmos naturales y se representan por

$$\log_e x = \ln x \qquad \boxed{y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x}$$

Las propiedades de definición de la función logaritmo natural quedan:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \ln(e^x) = x & x \in \Re \\ e^{\ln x} = x & x > 0 \end{array}}$$

Si se hace $x = 1$ entonces $\ln e = 1$

Encuentre x si

1.) $\ln x = 5$ 2.) $e^{5-3x} = 10$

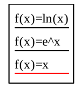
La función exponencial y logarítmica son equivalentes.

$$\log_{10} 100.000 = 5 \qquad 10^5 = 100.000$$

$$\log_2 8 = 3 \qquad 2^3 = 8$$

$$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3 \qquad 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

La gráfica de la función $f(x) = e^x$ y $f(x) = \ln x$ son simétricas respecto a la recta $f(x) = x$



1.) Es posible medir la concentración del alcohol en la sangre de una persona. Investigaciones médicas recientes sugieren que el riesgo R (dado como porcentaje) de tener un accidente automovilístico puede ser modelado mediante la ecuación:

$R = 6e^{kx}$ Donde *x* es la concentración de alcohol en la sangre y *k* una constante

Al suponer una concentración de 0.04 de alcohol en la sangre produce un riesgo del 10% (R = 10) de sufrir un accidente.

a) Cuál es el riesgo de un accidente para una concentración de alcohol del 17%
b) Cuál es la concentración de alcohol para un riesgo del 100%
c) Si la ley sugiere que las personas con un riesgo del 20% o mayor de sufrir un accidente no deben conducir vehículos ¿Con cuál concentración de alcohol en la sangre debe un conductor ser arrestado y multado

TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Se tienen en cuenta las traslaciones que son: el desplazamiento, el alargamiento, y la reflexión de las gráficas

Desplazamientos verticales y horizontales:

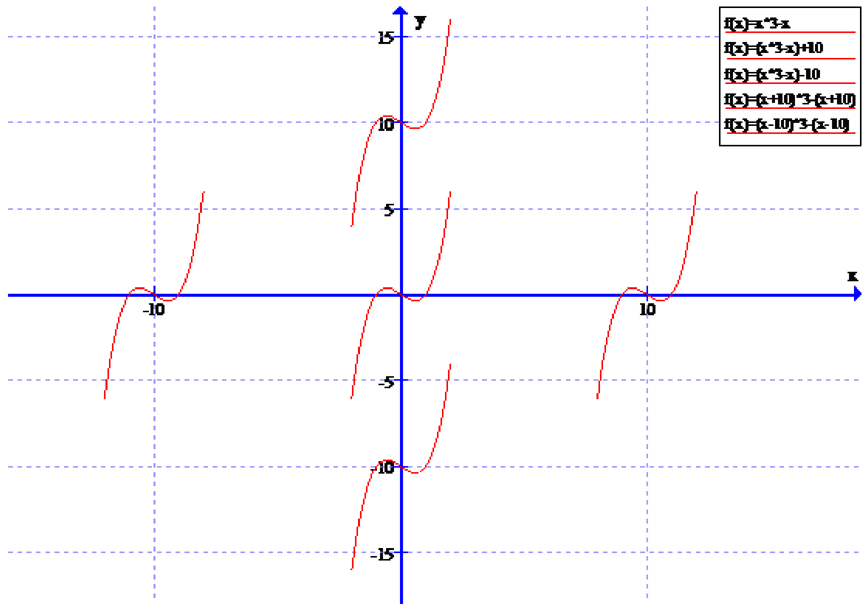
Suponga que $c > 0$. Para obtener la gráfica de:

$y = f(x) + c$ Se desplaza la gráfica de $y = f(x)$, c unidades hacia arriba.

$y = f(x) - c$ Se desplaza la gráfica de $y = f(x)$, c unidades hacia abajo.

$y = f(x - c)$ Se desplaza la gráfica de $y = f(x)$, c unidades hacia la derecha.

$y = f(x+c)$ Se desplaza la gráfica de $y = f(x)$, c unidades hacia la izquierda.



<u>Reflexión</u>

$y = -f(x)$ Refleja la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje x.

$y = f(-x)$ Refleja la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje y.

<u>Expansión y Contracción</u>

Suponga que $c > 1$. Para obtener la gráfica de:

$y = cf(x)$ Expande la gráfica $y = f(x)$ verticalmente en un factor c.

$y = (1/c)f(x)$ Comprime la gráfica $y = f(x)$ verticalmente en un factor c.

$y = f(cx)$ Comprime la gráfica $y = f(x)$ horizontalmente en un factor c.

$y = f(x/c)$ Expande la gráfica $y = f(x)$ horizontalmente en un factor c.

Ejercicios.

15.)Dada $y = \sqrt{x}$ Use las transformaciones de funciones para dibujar

a) $y = \sqrt{x} - 2$ b) $y = \sqrt{x-2}$ c) $y = -\sqrt{x}$

d) $y=2\sqrt{x}$ e) $y=\sqrt{-x}$ f) $y=-\sqrt{-x}$

g) $y=\sqrt{x+3}$ h) $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$ i) $y=-\sqrt{x}+3$

16.)Dada $y=x^2$ Use las transformaciones de funciones para dibujar

a) $y=x^2-1$ b) $y=x^2+5$ c) $y=-x^2+3$

d) $y=-x^2-3$ e) $y=(x+4)^2$ f) $y=(x-3)^2$

g) $y=(x+4)^2+2$ h) $y=-(x-2)^2-2$ i) $y=(x-2)^2-5$

17.)Dada $y=e^x$ Use las transformaciones de funciones para dibujar

a) $y=e^x-2$ b) $y=-e^x$ c) $y=2-e^x$

d) $y=e^{-x}-2$ e) $y=1+e^x$ f) $y=-e^{-x}-2$

Graficar las siguientes funciones mediante transformaciones de funciones

18.) $f(t)=t^2-6t+9$	19.) $f(t)=t^2+10t+25$	20.) $f(y)=y^2-6y+5$
21.) $f(x)=x^2+6x+10$	22.) $f(x)=-x^2+4x-3$	23.) $f(x)=x^2+4x+7$
24.) $f(x)=x^2-4x+3$	25.) $f(x)=x^2-4x-4$	26.) $f(x)=-x^2+6x-4$
27.) $f(x)=x^2+10x+27$	28.) $f(x)=-x^2+5x-3$	29.) $f(x)=x^2+3x+7$

OPERACIONES CON FUNCIONES

Definición: sean f y g funciones con dominio A y B. entonces las funciones $f+g$ $f-g$ $f\cdot g$ y $\frac{f}{g}$ se definen como sigue:

$(f+g)(x)= f(x)+g(x)$ Dominio = $A\cap B$

$(f-g)(x)= f(x)-g(x)$ Dominio = $A\cap B$

$(f\cdot g)(x)= f(x)\cdot g(x)$ Dominio = $A\cap B$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ Dominio = $\{x\in A\cap B / g(x)\neq 0\}$

Defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función resultante:

a) $f+g$ b) $f-g$ c) $f\cdot g$ d) $\frac{f}{g}$ e) $\frac{g}{f}$

30) $f(x)=2x^2+3x-2$ $g(x)=x^2+1$

31) $f(x)=\sqrt{x}$ $g(x)=4-x^2$

32) $f(x)=x^2+1$ $g(x)=3x-2$

33) $f(x)=\sqrt{x-4}$ $g(x)=x^2-4$

34) $f(x)=x^2$ $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

35) $f(x)=\sqrt{x}$ $g(x)=\sqrt{4-x^2}$.

36) $f(x)=\sqrt{x}$ $g(x)=x^2+1$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Definición: dadas dos funciones f y g, la función compuesta $(f\circ g)$ también llamada la composición de f y g, está definida por: $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

El dominio de $(f\circ g)$ es el conjunto de todas las x en el domino de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de $f(x)$.

<u>Ejercicio:</u> Encuentre la función compuesta $(f\circ g)$ y determine el dominio

$f(x)=x^2$ $g(x)=x-3$.

La función compuesta no es conmutativa, es decir, $(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)$. La notación $(f\circ g)(x)$ significa que primero se aplica la función $g(x)$ y luego $f(x)$.

Encuentre la función compuesta $(f\circ g)$, $(g\circ f)$, $(f\circ f)$, $(g\circ g)$ y determine el dominio

37.) $f(x)=\sqrt{x}$ $g(x)=\sqrt{2-x}$.

38.) $f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad g(x)=x^2+1$

39.) $f(x)=x^2-1$ $\qquad g(x)=\dfrac{1}{x}$

40.) $f(x)=x^2+1$ $\qquad g(x)=3x-2$

41.) $f(x)=\sqrt{x-4}$ $\qquad g(x)=x^2-4$

42.) $f(x)=x^2$ $\qquad g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

43.) $f(x)=x^{10}$ $\qquad g(x)=3x^4-1$

44.) $f(x)=2x+1$ $\qquad g(x)=\dfrac{x-1}{2}$

45.) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ $\qquad g(x)=\sqrt{3-x}$

46.) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ $\qquad g(x)=\sqrt{x-1}$