Instituto Tecnológico Metropolitano ITM

3.4 Calculo de Campo Eléctrico

- A partir de la expresión $V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ se puede escribir:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si ocurre que $d\vec{l} \equiv d\vec{r}$ (coordenadas cartesianas), entonces se puede escribir

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Luego las componentes del campo $\vec{E}$ están dadas por:

$$E_x = -\left[\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}\right] \; ; \; E_y = -\left[\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}\right] \; ; \; E_z = -\left[\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}\right]$$

3.4 Calculo de Campo Eléctrico

También se puede escribir

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Donde $\vec{\nabla} V$ es la representación simbólica del operador gradiente. Y

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \quad ; \quad (\ \vec{\nabla} \text{ se conoce como } \textbf{\textit{nabla}}.)$$

3.4 Calculo de Campo Eléctrico

También se puede escribir

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Donde $\vec{\nabla} V$ es la representación simbólica del operador gradiente. Y

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \quad ; \quad (\ \vec{\nabla} \text{ se conoce como } \textbf{\textit{nabla}}.)$$

El **gradiente** de un campo escalar V es un vector que representa tanto la magnitud como la dirección de la máxima rapidez de incremento espacial de V.

3.4 Calculo de Campo Eléctrico

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z}$$

en el de las coordenadas cilíndricas,

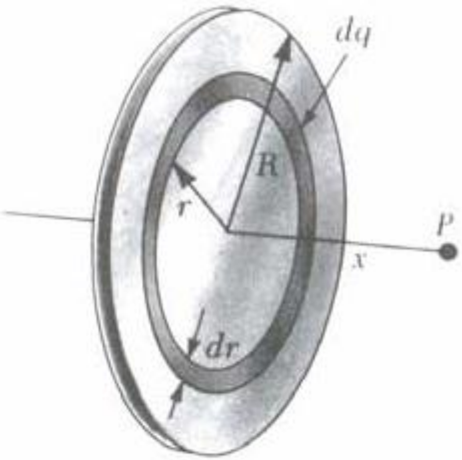
$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z}$$

y en el de las coordenadas esféricas,

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi}$$

3.4 Calculo de Campo Eléctrico

- Disco cargado de radio R y carga uniforme:



$$dE = \frac{kx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} (2\pi\sigma r\, dr)$$

$$E = kx\pi\sigma \int_0^R \frac{2r\, dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

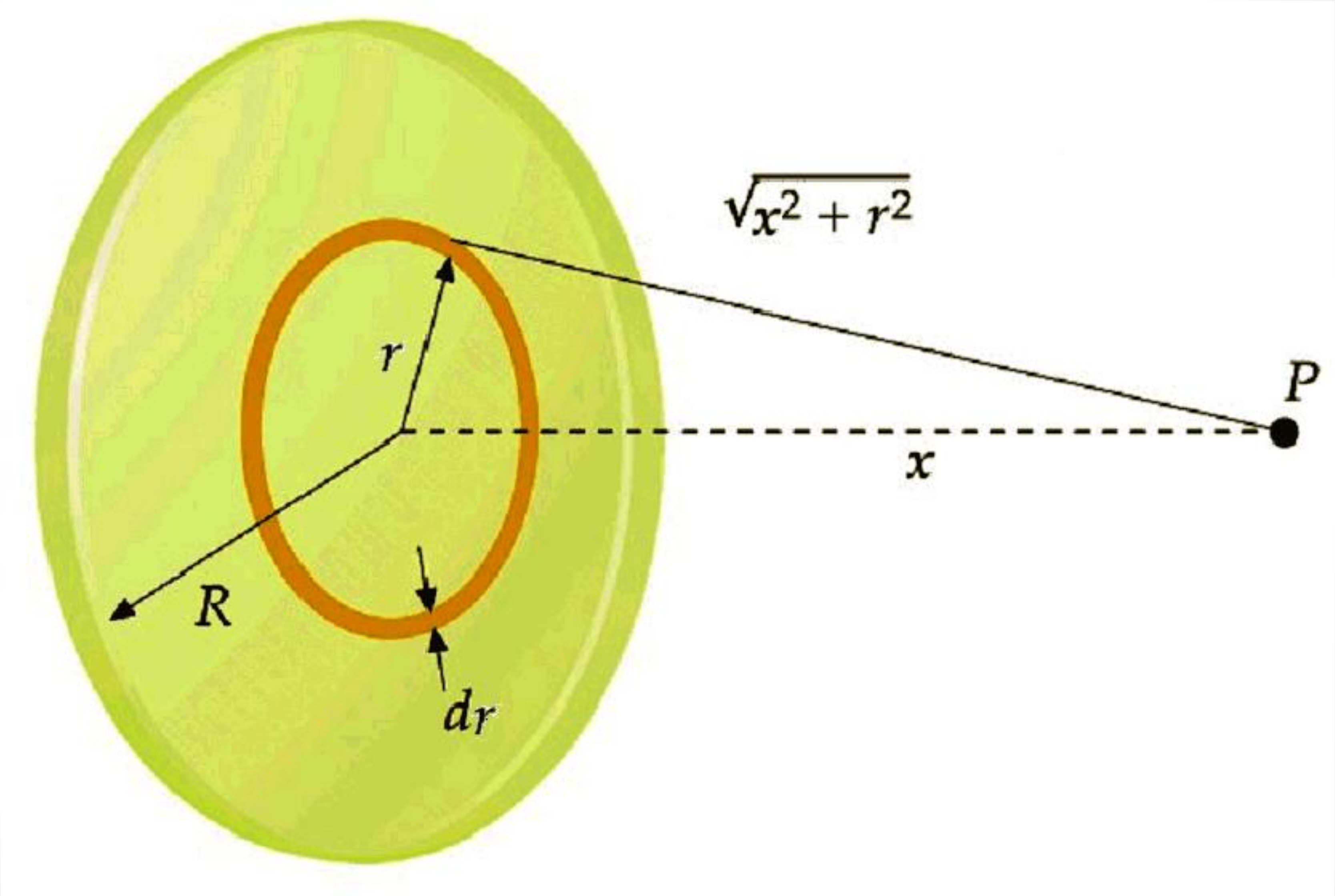
$$= kx\pi\sigma \int_0^R (x^2 + r^2)^{-3/2}\, d(r^2)$$

$$= kx\pi\sigma \left[\frac{(x^2 + r^2)^{-1/2}}{-1/2} \right]_0^R$$

$$= 2\pi k\sigma \left(\frac{x}{|x|} - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right)$$

$$= 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right)$$

3.4 Calculo de Campo Eléctrico



Ejemplo 2.- Potencial eléctrico sobre el eje de un disco uniformemente cargado.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi r \sigma dr}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{2\pi r\, dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\sqrt{x^2 + r^2}\Big]_0^R$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{x^2 + R^2} - x\right]$$

3.4 Calculo de Campo Eléctrico

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{x^2 + R^2} - x\right]$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

$$E_x = 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}}\right)$$

$$E_y = 0$$

3.5 Potencial Eléctrico de un Dipolo

Energía de un dipolo

Cuando un dipolo eléctrico está inmerso en un campo eléctrico, las fuerzas que experimentan las cargas son iguales en magnitud pero opuestas en dirección, por consiguiente la fuerza neta es cero, pero existe un momento sobre el dipolo que tiende a alinearlo con el campo y que está dado por:

$$\tau = 2F(a\ sen\theta)$$

Dado $F = qE$ y $P = 2aq$, se tiene

$$\tau = 2aqE\ sen\theta$$

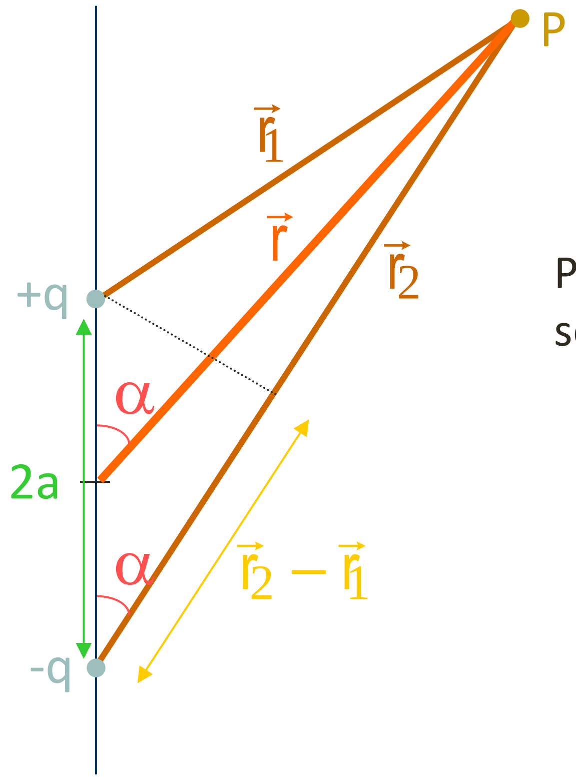
$$\tau = PE\ sen\theta$$

En forma vectorial

$$\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E}$$

3.5 Potencial Eléctrico de un Dipolo

Vamos a calcular el potencial eléctrico que produce un dipolo eléctrico en un punto del espacio.



$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right)$$

Para puntos muy alejados del dipolo, tales que r>>2a, se pueden hacer las siguientes aproximaciones

$$r_2 - r_1 \cong 2\,a\,\mathrm{Cos}\alpha$$

$$r_1 r_2 \cong r^2$$

3.5 Potencial Eléctrico de un Dipolo

Teniendo en cuenta estas dos aproximaciones, podemos escribir

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2a\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{r^2}$$

Recordando la definición de momento dipolar eléctrico $\Rightarrow$ $P = 2aq$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{P\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{r^2}$$

- V = 0 para α = 90º $\rightarrow$

No se requiere trabajo para llevar una carga de prueba desde el infinito hasta el dipolo a lo largo de la línea perpendicular al punto medio entre las dos cargas.

3.6 Ecuación de Laplace y Poisson

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Ecuación de Poisson. La divergencia de un gradiente es la laplaciana, ∇^2, del campo escalar. En coordenadas cartesianas se expresa sencillamente como:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

3.6 Ecuación de Laplace y Poisson

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

y físicamente viene a representar la variación promedio del potencial en los alrededores inmediatos de cada punto del espacio. En los problemas habituales de potencial esta ecuación debe resolverse para obtener una solución genérica, y quedarán dos constantes por determinar mediante condiciones de contorno. Singular importancia tiene la ecuación diferencial del potencial en aquellos puntos del espacio en los que no hay carga eléctrica, denominada *ecuación de Laplace*:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

3.6 Ecuación de Laplace y Poisson

De acuerdo con el **teorema de unicidad**, si se puede determinar que una solución de la ecuación de Laplace satisface las condiciones en la frontera, esa solución es la única.

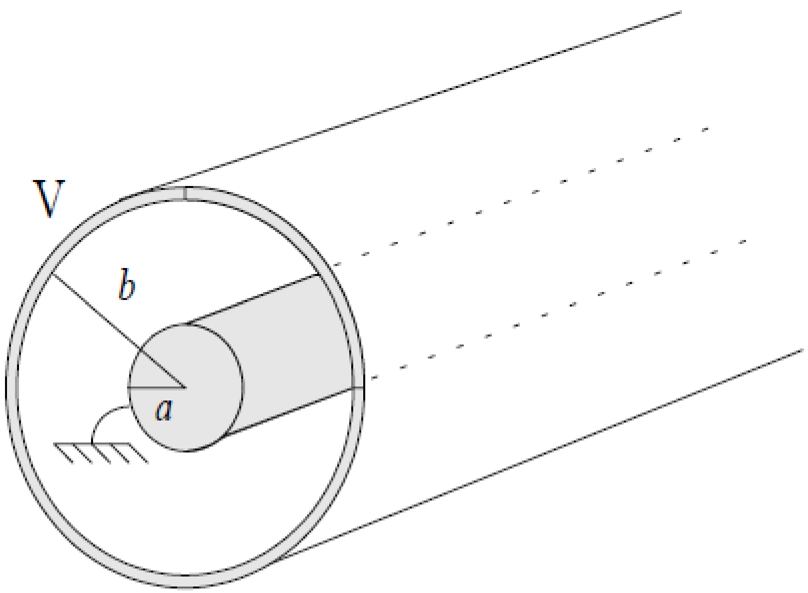
$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0}$$

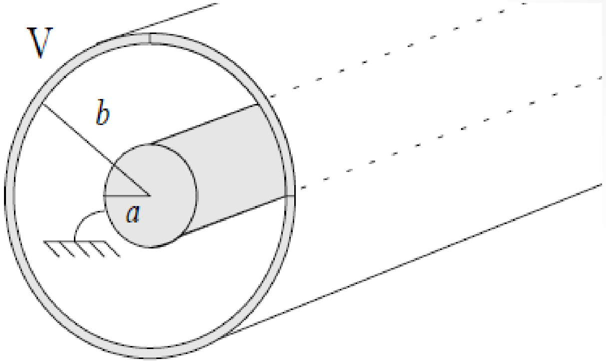
$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0}$$

3.6 Ecuación de Laplace y Poisson

Un cable coaxial está formado por dos conductores cilíndricos, de radios a y b. El conductor exterior se pone a potencial V y el interior se conecta a tierra. Obtenga el campo eléctrico entre los conductores.



3.6 Ecuación de Laplace y Poisson



La alternativa es obtener la función potencial mediante la resolución de la ecuación de Laplace. Podemos afirmar que nuestro potencial sólo será función del radio: $\phi(\vec{r}) = \phi(\rho)$, y por tanto:

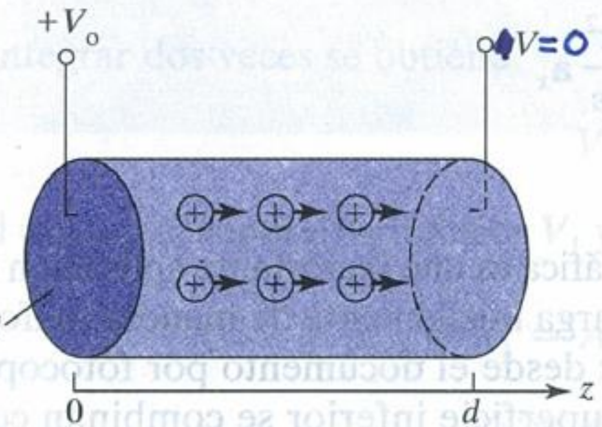
$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) = 0$$

La solución a esa ecuación es: $\phi(\rho) = A\ln\rho + B$, y por aplicación de las condiciones de contorno: $\phi(\rho = a) = 0$, $\phi(\rho = b) = V$, se llega a:

$$\phi(\rho) = V\frac{\ln(\rho/a)}{\ln(b/a)} \qquad \text{y} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{V}{\rho}\frac{1}{\ln(b/a)}\hat{\rho}$$

3.6 Ecuación de Laplace y Poisson

Calcular el potencial y el campo



Puesto que $\rho_v \neq 0$, se aplica la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

Las condiciones en la frontera $V(z = 0) = V_o$ y $V(z = d) = 0$ indican que V sólo depende de z (no hay dependencia de ρ ni ϕ). Por tanto

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{-\rho_o}{\varepsilon}$$

Al integrar una vez se obtiene

$$\frac{dV}{dz} = \frac{-\rho_o z}{\varepsilon} + A$$

Al integrar una vez más se obtiene

$$V = -\frac{\rho_o z^2}{2\varepsilon} + Az + B$$

3.6 Ecuación de Laplace y Poisson

donde A y B son constantes de integración por determinar mediante la aplicación de las condiciones en la frontera. Cuando $z = 0, V = V_o$,

$$V_o = -0 + 0 + B \rightarrow B = V_o$$

Cuando $z = d, V = 0$,

$$0 = -\frac{\rho_o d^2}{2\varepsilon} + Ad + V_o$$

o

$$A = \frac{\rho_o d}{2\varepsilon} - \frac{V_o}{d}$$

El campo eléctrico está dado por

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz}\mathbf{a}_z = \left(\frac{\rho_o z}{\varepsilon} - A\right)\mathbf{a}_z$$

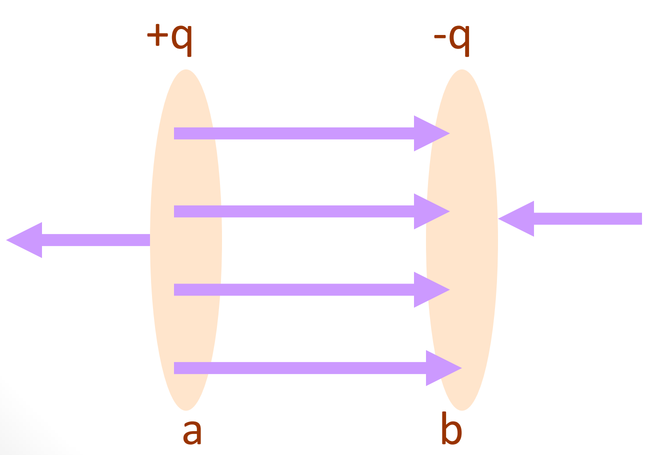
$$= \left[\frac{V_o}{d} + \frac{\rho_o}{\varepsilon}\left(z - \frac{d}{2}\right)\right]\mathbf{a}_z$$

4 CONCEPTO DE CAPACITANCIA

Es un dispositivo que almacena energía en forma de carga por medio de un campo eléctrico

Utilidad: Almacenamiento de carga y energía en los circuitos. La propiedad que caracteriza este almacenamiento es la **Capacitancia Eléctrica**.

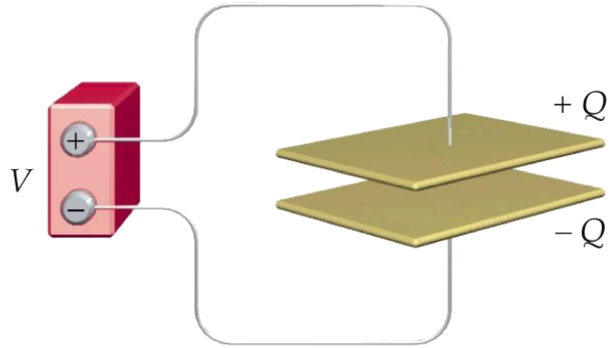
Construcción de un condensador: Dos conductores aislados (**placas**) de forma arbitraria, con cargas +q y –q.



Un condensador se caracteriza por la carga de cualquiera de los conductores y por la diferencia de potencial que existe entre ellos.

Cómo se carga un condensador:

Conectando las dos placas a los terminales de una batería



De esta forma, los portadores de carga se mueven de una placa a otra hasta que se alcanza el equilibrio electrostático. Así, la diferencia de potencial entre las placas es la misma que entre los terminales de la batería.

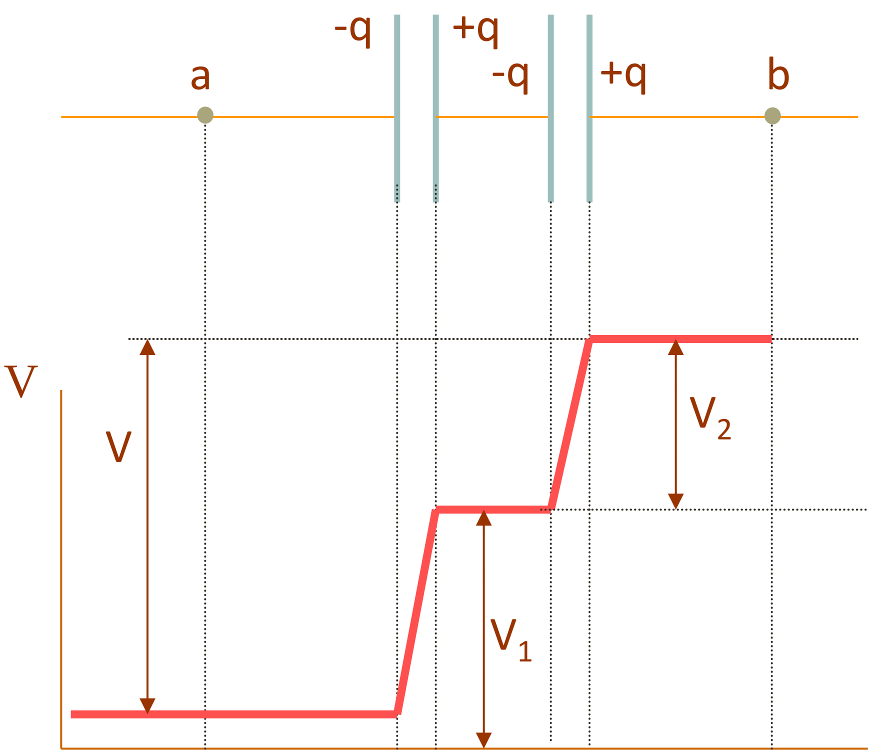
La relación ente la carga y el potencial es una característica propia de cada condensador, por lo que se define la **Capacitancia** del condensador como

$$C = \frac{q}{V}$$

Unidades en el S.I.: **Faradio (F)**

4.3 ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

Condensadores en serie



Regla general: La diferencia de potencial entre los extremos de un cierto número de dispositivos conectados en serie es la suma de las diferencias de potencial entre los extremos de cada dispositivo individual.

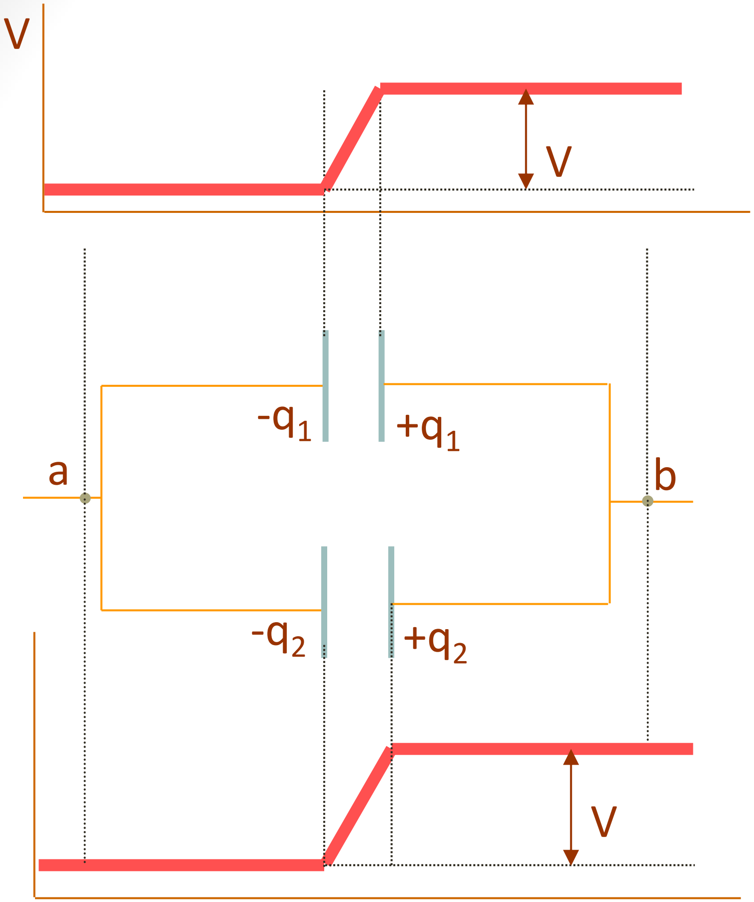
En este caso $V=V_b-V_a=V_1+V_2$ y la carga permanece constante, luego

$$V_1 = \frac{q}{C_1} \quad y \quad V_2 = \frac{q}{C_2} \qquad V = V_1 + V_2$$

$$V = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \Rightarrow C_{eq} = \frac{q}{V} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

Condensadores en paralelo



Regla general: La diferencia de potencial entre los extremos de un cierto número de dispositivos conectados en paralelo es la misma para todos ellos.

En este caso $q = q_1 + q_2$ y es la diferencia de potencial la que permanece constante, luego

$$q_1 = C_1 V \quad y \quad q_2 = C_2 V \qquad q = q_1 + q_2$$

$$q = V(C_1 + C_2) \Rightarrow C = C_1 + C_2$$

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$

Calcular la capacitancia equivalente en A y B