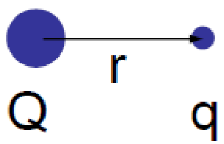
Instituto Tecnológico Metropolitano ITM

3.3 Calculo del Potencial Eléctrico

Potencial creado por una carga puntual



$$U = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V = \frac{U}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Potencial creado por *n* cargas puntuales

$$V = \sum V_i = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho dv}{R}\left[= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma dS}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda dl}{R}\right]$$

Cálculo directo del potencial eléctrico en el caso de distribuciones continuas de carga.

3.3 Calculo del Potencial Eléctrico

Existen dos métodos para calcular el potencial eléctrico asociado a una distribución continua de cargas:

I Conocido el campo eléctrico creado por la distribución

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

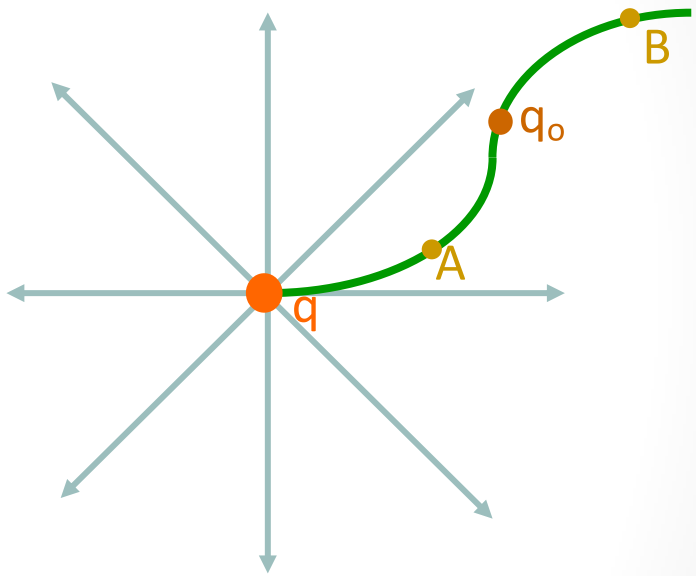
En este caso debemos tomar como origen de potenciales un punto de referencia arbitrario.

II Para el caso de distribuciones finitas de carga, para las cuales podemos suponer que $V(\infty)=0$. En este caso

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

3.3 Calculo del Potencial Eléctrico

Se puede calcular el potencial de una carga puntual a partir del campo eléctrico que produce.



I.- Calculemos el *trabajo realizado por el campo* para desplazar la carga desde el punto A al punto B

$$\cancel{V(B)} - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

0

$$-V(r) = -\int_r^{\infty} k \frac{q}{r^2} dr = kq \frac{1}{r}$$

$$V(r) = k\frac{q}{r}$$

Tomando como origen la carga y asumimos un punto de estudio en el infinito,

podemos identificar el punto B= ∞ y A= r

3.3 Calculo del Potencial Eléctrico

II.- Un método alternativo es calcular el trabajo que debe realizar una fuerza exterior para traer una carga desde el infinito hasta un punto r. En este caso el punto A coincide con el infinito.

$$W_{AB}^{ext} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow V(B) - \underbrace{V(A)}_{0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_\infty^r k\frac{q}{r^2}dr$$

$$V(r) = k\frac{q}{r}$$

La energía potencial de una carga q_o situada a una distancia r de q, será

$$\Rightarrow U = q_o V = k\frac{qq_o}{r}$$

La energía potencial de un sistema de cargas puntuales será el trabajo necesario para llevar cada una de ellas desde el infinito hasta su posición final.

Sistema Discreto

Un positrón (antipartícula del electrón) tiene una masa de $9.11\ x10^{-31}$ kg y una carga $+e = 1.6\ x10^{-19}$ C. Suponga que un positrón se mueve en la vecindad de una partícula alfa cuya carga es $+2e = 3.2\ x10^{-19}$ C. La partícula alfa tiene una masa más de 7000 veces mayor que la del positrón, por lo que se supondrá que está en reposo en algún marco de referencia inercial. Cuando el positrón está a $1x10^{-10}$ m de la partícula alfa, se aleja de ésta con una rapidez de $3\ x10^{6}$ m/s.

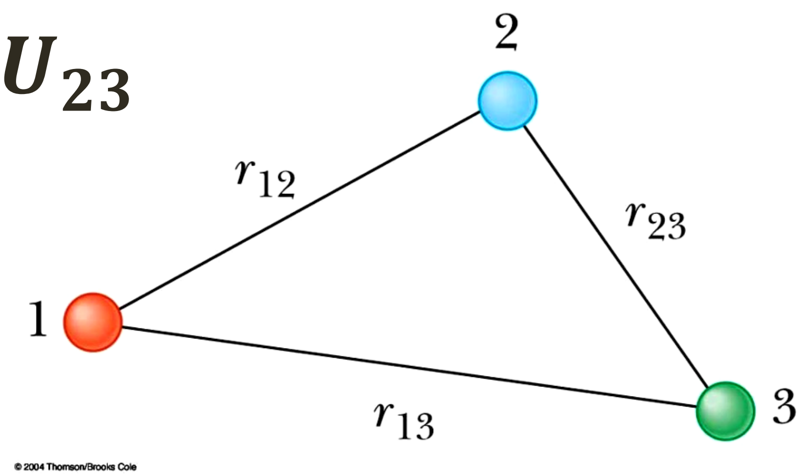
a) ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando las dos partículas están separadas por una distancia de $2x10^{-10}$ m?

b) ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando está muy alejado de la partícula alfa?

- La energía potencial de un sistema de cargas es la suma de las energías potenciales que aparecen de cada par de cargas. A este principio se llama Principio de Superposición

$$U_{total} = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

$$= K\left[\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}}\right]$$

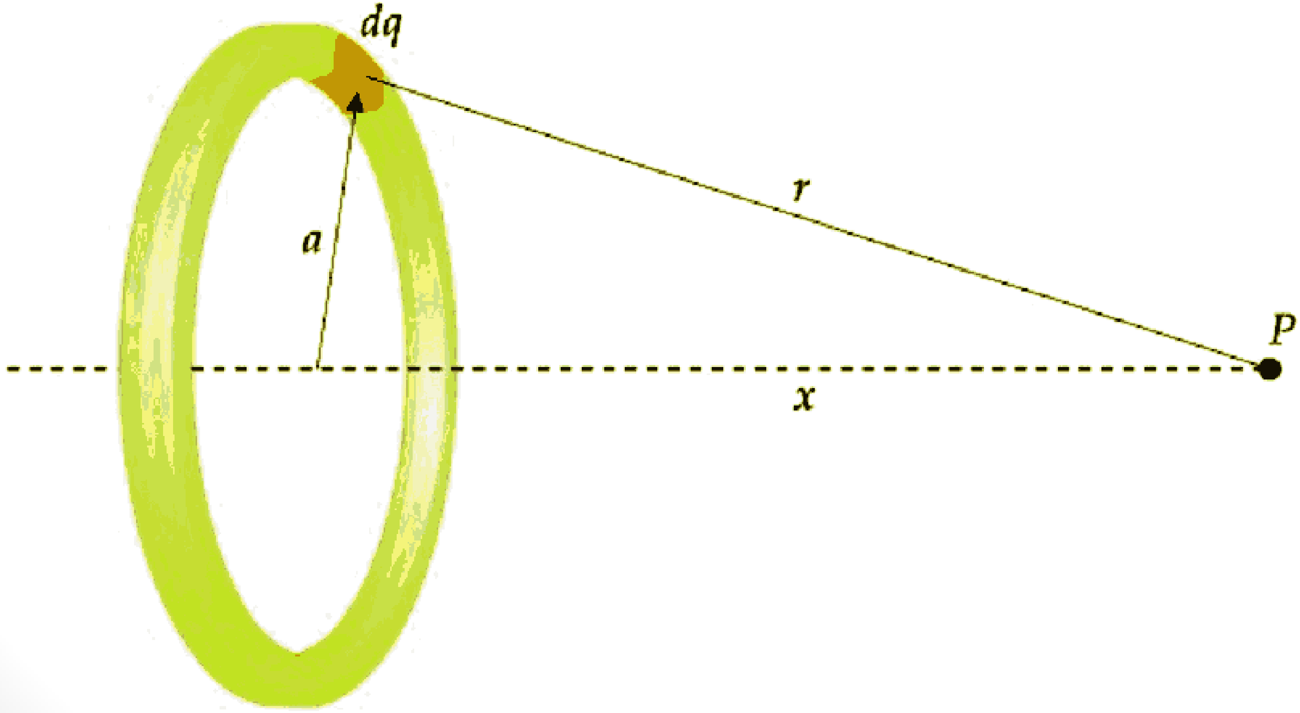


Sistema continuo

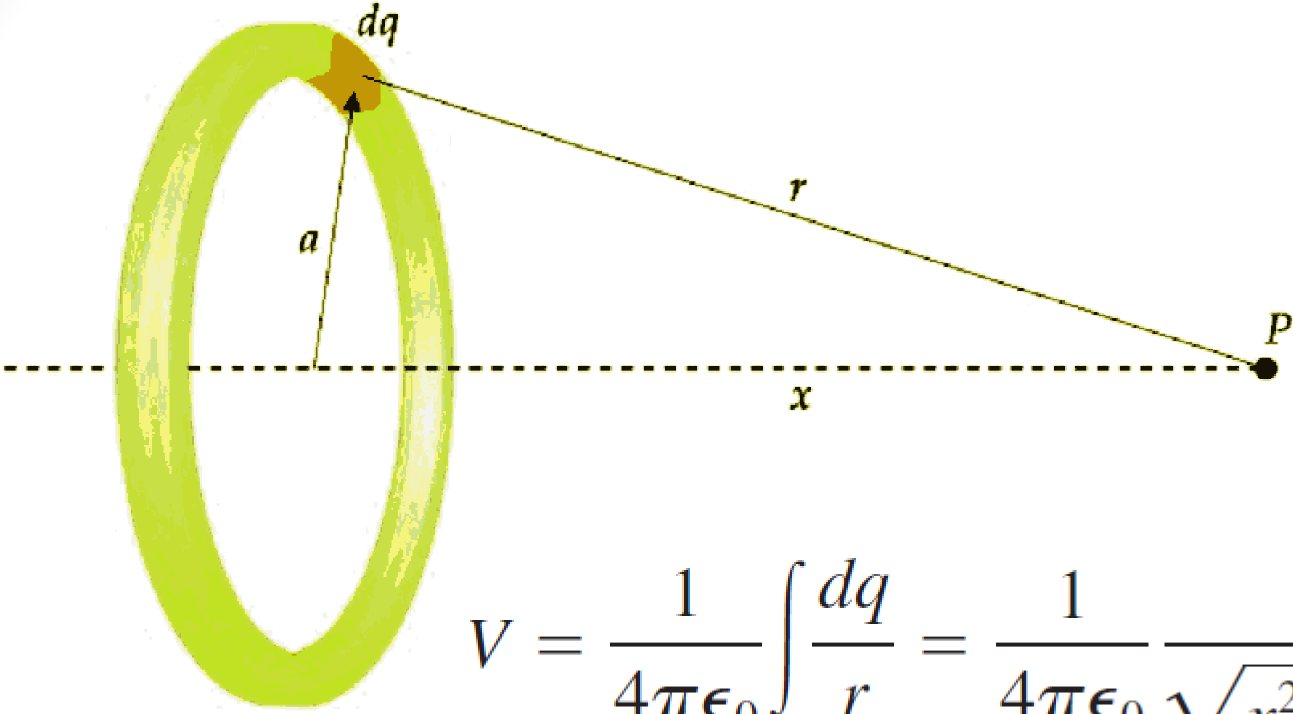
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho dv}{R}\left[= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma dS}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda dl}{R}\right]$$

Cálculo directo del potencial eléctrico en el caso de distribuciones continuas de carga.

Ejemplo 1.- Potencial eléctrico sobre el eje de un anillo cargado.



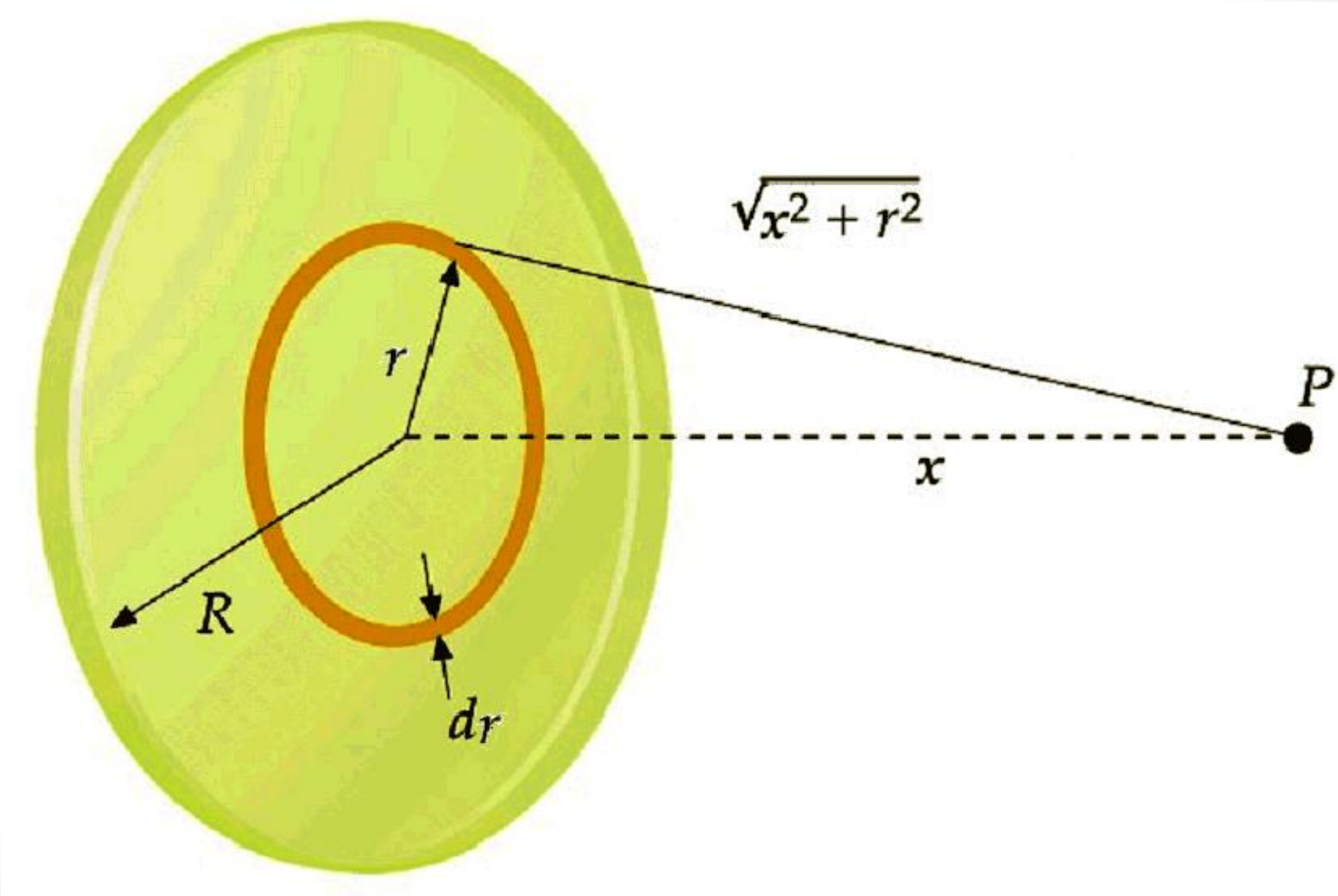
Ejemplo 1.- Potencial eléctrico sobre el eje de un anillo cargado.



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+a^2}}\int_0^{2\pi} a\,d\emptyset$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi a\lambda}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Ejemplo 2.- Potencial eléctrico sobre el eje de un disco uniformemente cargado.



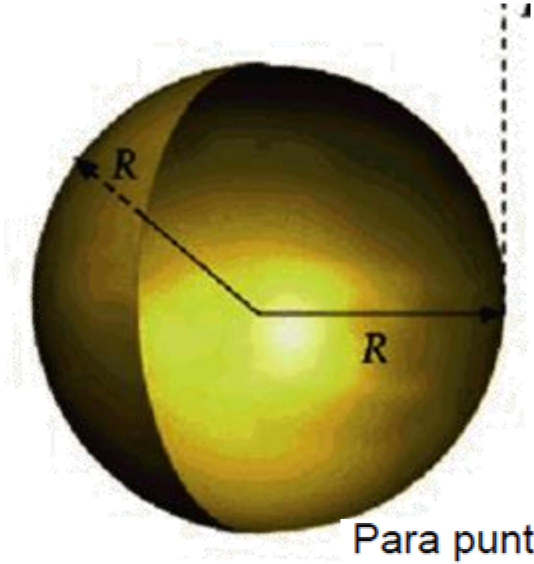
Ejemplo 2.- Potencial eléctrico sobre el eje de un disco uniformemente cargado.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi r\sigma dr}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{2\pi r\, dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\sqrt{x^2 + r^2}\Big]_0^R$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{x^2 + R^2} - x\right]$$

Ejemplo 3.- Potencial eléctrico en el interior y el exterior de una corteza esférica de carga.



$$V(B) - \underbrace{V(A)}_{0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_\infty^r k\frac{q}{r^2}dr$$

Para puntos exteriores, es decir: $r \geq R$, el campo eléctrico es :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} .$$

Luego,

$$V_P = -\int_\infty^r \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_\infty^r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} .$$

Ejemplo 3.- Potencial eléctrico en el interior y el exterior de una corteza esférica de carga.

$$V(B) - \cancel{V(A)} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_\infty^r k \frac{q}{r^2} dr$$

$$\xrightarrow{} 0$$

Para puntos interiores, $r < R$, el campo eléctrico es nulo. Usando la trayectoria radial para determinar el potencial en un punto interior, se tendrá:

$$V_P = -\int_\infty^r \vec{E} \bullet d\vec{\ell} = -\int_\infty^R \vec{E} \bullet d\vec{\ell} - \int_R^r \vec{E} \bullet d\vec{\ell} = -\int_\infty^R \vec{E} \bullet d\vec{\ell},$$

puesto que $\vec{E} = 0$ para $r < R$.

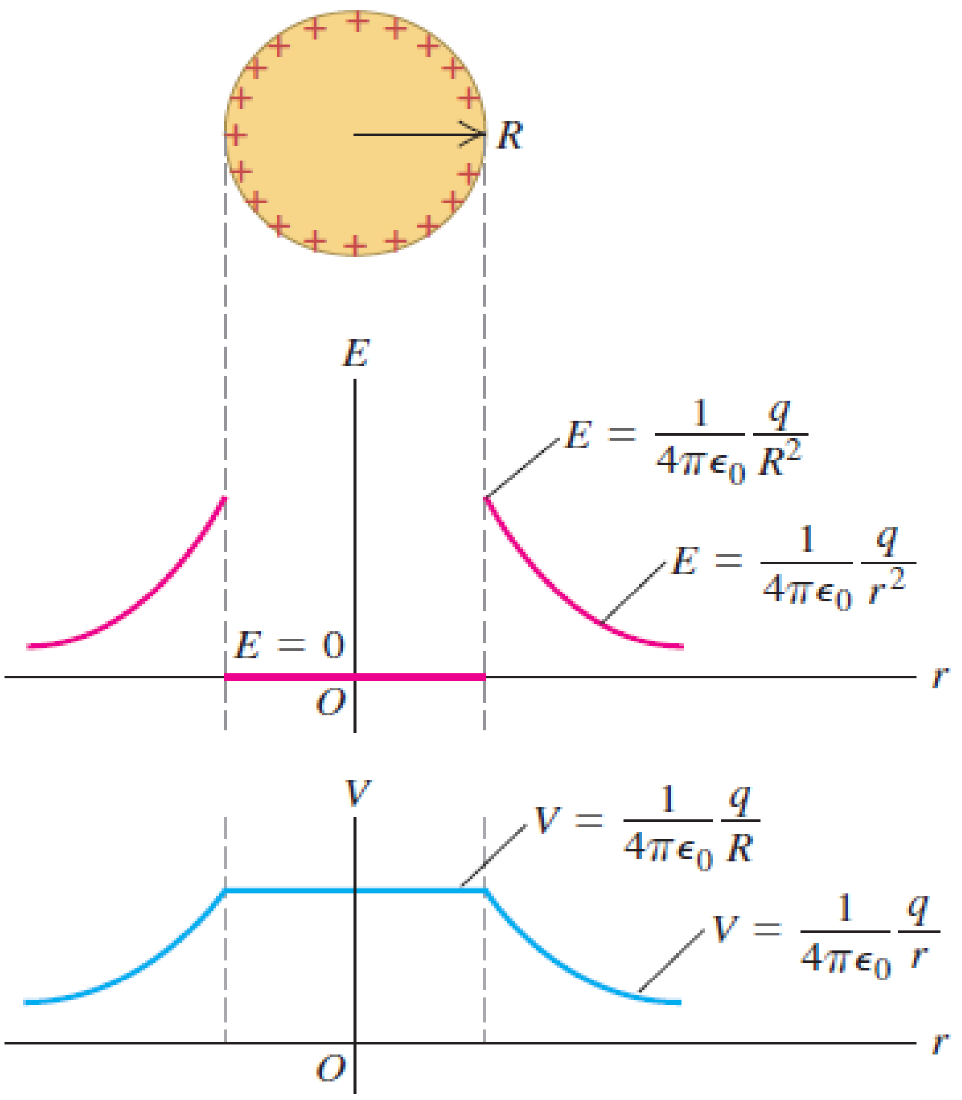
Luego, en un punto interior de la esfera hueca, el potencial tiene un valor constante igual a:

$$V_P = -\int_\infty^R \vec{E} \bullet dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

De otra manera, la carga se movería dentro de la esfera. De esta forma, si una carga de prueba se desplaza de un punto a otro en el interior de la esfera, no se efectúa ningún trabajo sobre la carga. Esto significa que el potencial es el mismo en todos los puntos del interior de la esfera y es igual a su valor en la superficie.

Ejemplo 3.- Potencial eléctrico en el interior y el exterior de una corteza esférica de carga.

Magnitud del campo eléctrico E y el potencial V en puntos dentro y fuera de una esfera conductora con carga positiva.



3.4 Calculo de Campo Eléctrico

- A partir de la expresión $V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ se puede escribir:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si ocurre que $d\vec{l} \equiv d\vec{r}$ (coordenadas cartesianas), entonces se puede escribir

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Luego las componentes del campo $\vec{E}$ están dadas por:

$$E_x = -\left[\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}\right] \; ; \; E_y = -\left[\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}\right] \; ; \; E_z = -\left[\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}\right]$$

3.4 Calculo de Campo Eléctrico

También se puede escribir

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Donde $\vec{\nabla} V$ es la representación simbólica del operador gradiente. Y

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \quad ; \quad (\ \vec{\nabla} \text{ se conoce como } \textbf{\textit{nabla}}.)$$

3.4 Calculo de Campo Eléctrico

También se puede escribir

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Donde $\vec{\nabla} V$ es la representación simbólica del operador gradiente. Y

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \quad ; \quad (\ \vec{\nabla} \text{ se conoce como } \textbf{\textit{nabla}}.)$$

El **gradiente** de un campo escalar V es un vector que representa tanto la magnitud como la dirección de la máxima rapidez de incremento espacial de V.

3.4 Calculo de Campo Eléctrico

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z}$$

en el de las coordenadas cilíndricas,

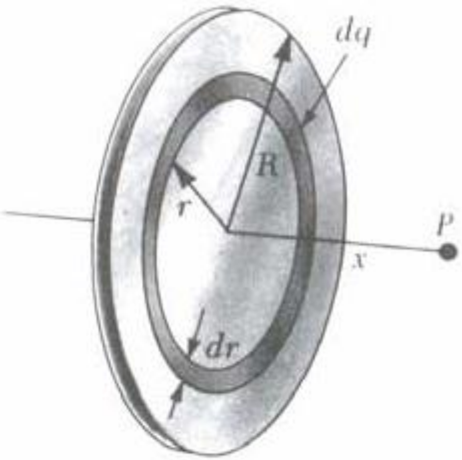
$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z}$$

y en el de las coordenadas esféricas,

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi}$$

3.4 Calculo de Campo Eléctrico

- Disco cargado de radio R y carga uniforme:



$$dE = \frac{kx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} (2\pi\sigma r \, dr)$$

$$E = kx\pi\sigma \int_0^R \frac{2r \, dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

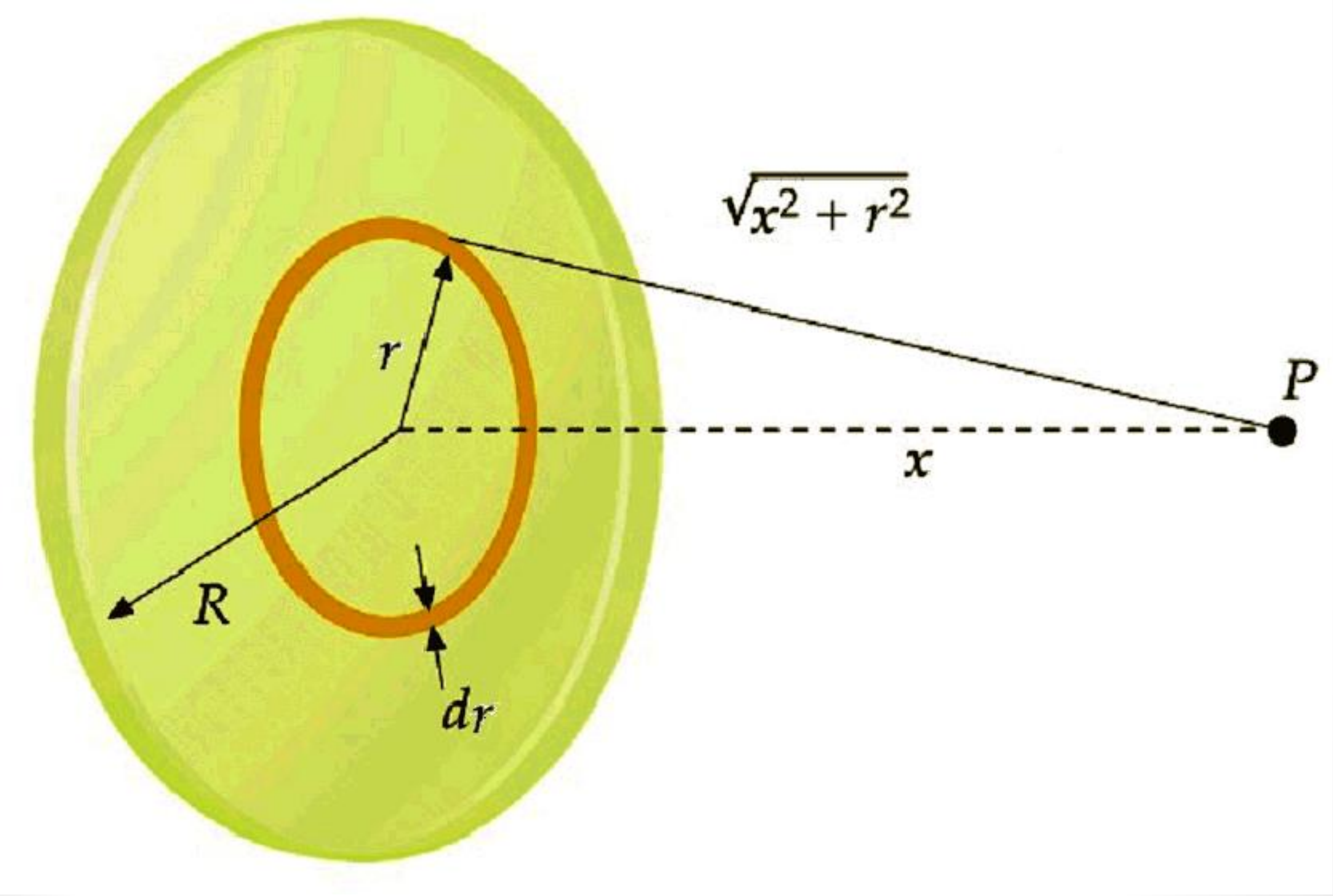
$$= kx\pi\sigma \int_0^R (x^2 + r^2)^{-3/2} \, d(r^2)$$

$$= kx\pi\sigma \left[\frac{(x^2 + r^2)^{-1/2}}{-1/2} \right]_0^R$$

$$= \quad 2\pi k\sigma \left(\frac{x}{|x|} - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right)$$

$$= \quad 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right)$$

3.4 Calculo de Campo Eléctrico



Ejemplo 2.- Potencial eléctrico sobre el eje de un disco uniformemente cargado.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi r\sigma dr}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{2\pi r\, dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\sqrt{x^2 + r^2}\,\Big]_0^R$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{x^2 + R^2} - x\right]$$

3.4 Calculo de Campo Eléctrico

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{x^2 + R^2} - x\right]$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

$$E_x = 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}}\right)$$

$$E_y = 0$$

3.5 Potencial Eléctrico de un Dipolo

Energía de un dipolo

Cuando un dipolo eléctrico está inmerso en un campo eléctrico, las fuerzas que experimentan las cargas son iguales en magnitud pero opuestas en dirección, por consiguiente la fuerza neta es cero, pero existe un momento sobre el dipolo que tiende a alinearlo con el campo y que está dado por:

$$\tau = 2F(a\, sen\theta)$$

Dado $F = qE$ y $P = 2aq$, se tiene

$$\tau = 2aqE\ sen\theta$$

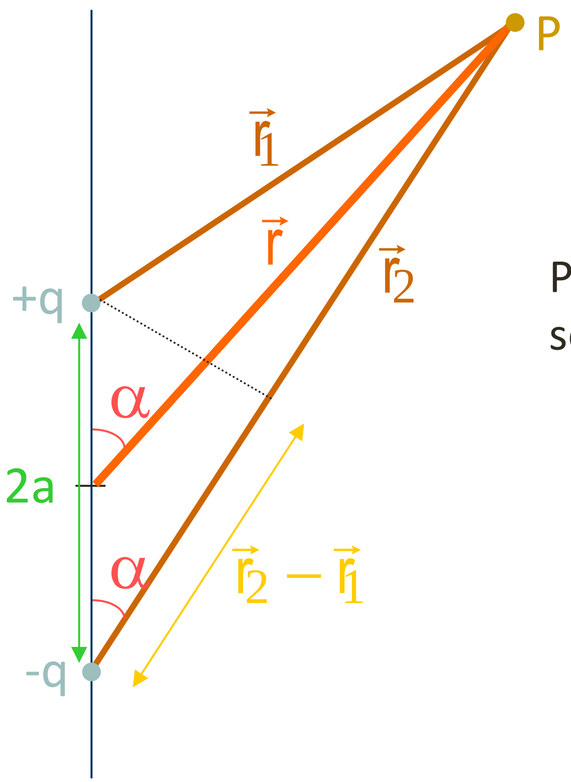
$$\tau = PE\ sen\theta$$

En forma vectorial

$$\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E}$$

3.5 Potencial Eléctrico de un Dipolo

Vamos a calcular el potencial eléctrico que produce un dipolo eléctrico en un punto del espacio.



$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right)$$

Para puntos muy alejados del dipolo, tales que r>>2a, se pueden hacer las siguientes aproximaciones

$$r_2 - r_1 \cong 2\,a\,\mathrm{Cos}\alpha$$

$$r_1 r_2 \cong r^2$$

3.5 Potencial Eléctrico de un Dipolo

Teniendo en cuenta estas dos aproximaciones, podemos escribir

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\,Cos\,\alpha}{r^2}$$

Recordando la definición de momento dipolar eléctrico $\Rightarrow$ $P = 2aq$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P\,Cos\,\alpha}{r^2}$$

- $V = 0$ para $\alpha = 90º$ $\rightarrow$ **No se requiere trabajo para llevar una carga de prueba desde el infinito hasta el dipolo a lo largo de la línea perpendicular al punto medio entre las dos cargas.**

3.6 Ecuación de Laplace y Poisson

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Ecuación de Poisson. La divergencia de un gradiente es la laplaciana, ∇^2, del campo escalar. En coordenadas cartesianas se expresa sencillamente como:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Ecuación de Laplace:

$$\nabla^2\phi = 0$$

3.6 Ecuación de Laplace y Poisson

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

y físicamente viene a representar la variación promedio del potencial en los alrededores inmediatos de cada punto del espacio. En los problemas habituales de potencial esta ecuación debe resolverse para obtener una solución genérica, y quedarán dos constantes por determinar mediante condiciones de contorno. Singular importancia tiene la ecuación diferencial del potencial en aquellos puntos del espacio en los que no hay carga eléctrica, denominada *ecuación de Laplace*:

$$\nabla^2\phi = 0$$

3.6 Ecuación de Laplace y Poisson

De acuerdo con el **teorema de unicidad**, si se puede determinar que una solución de la ecuación de Laplace satisface las condiciones en la frontera, esa solución es la única.

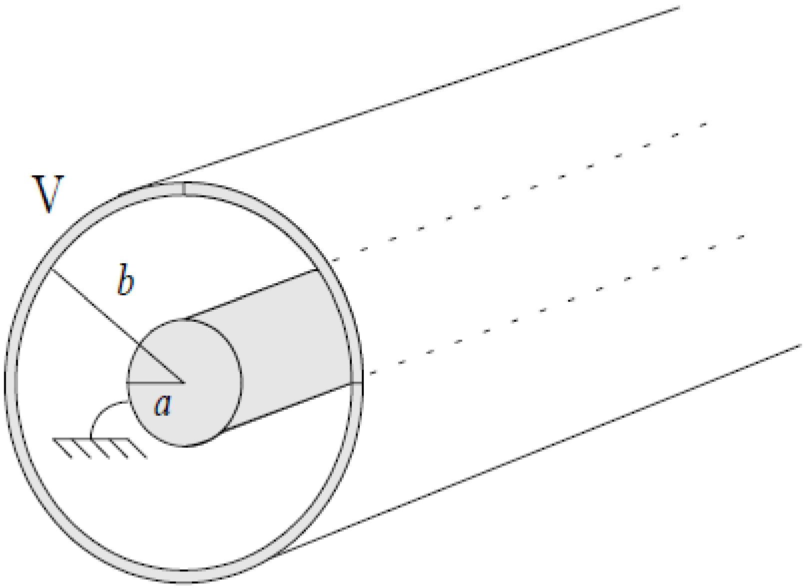
$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0}$$

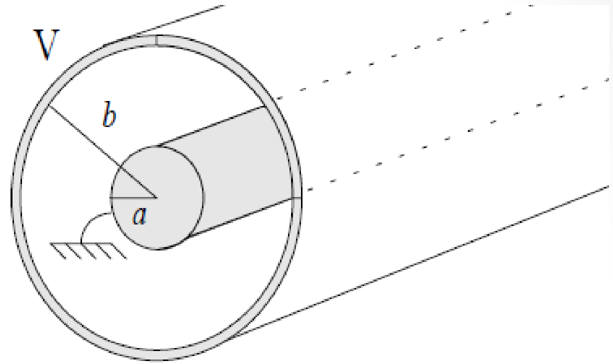
$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0}$$

3.6 Ecuación de Laplace y Poisson

Un cable coaxial está formado por dos conductores cilíndricos, de radios a y b. El conductor exterior se pone a potencial V y el interior se conecta a tierra. Obtenga el campo eléctrico entre los conductores.



3.6 Ecuación de Laplace y Poisson



La alternativa es obtener la función potencial mediante la resolución de la ecuación de Laplace. Podemos afirmar que nuestro potencial sólo será función del radio: $\phi(\vec{r}) = \phi(\rho)$, y por tanto:

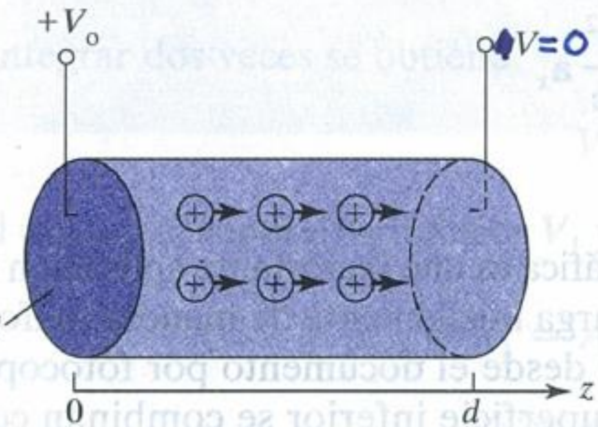
$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) = 0$$

La solución a esa ecuación es: $\phi(\rho) = A\ln\rho + B$, y por aplicación de las condiciones de contorno: $\phi(\rho = a) = 0$, $\phi(\rho = b) = V$, se llega a:

$$\phi(\rho) = V\frac{\ln(\rho/a)}{\ln(b/a)} \qquad \text{y} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{V}{\rho}\frac{1}{\ln(b/a)}\hat{\rho}$$

3.6 Ecuación de Laplace y Poisson

Calcular el potencial y el campo



Puesto que $\rho_v \neq 0$, se aplica la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

Las condiciones en la frontera $V(z = 0) = V_o$ y $V(z = d) = 0$ indican que V sólo depende de z (no hay dependencia de ρ ni ϕ). Por tanto

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{-\rho_o}{\varepsilon}$$

Al integrar una vez se obtiene

$$\frac{dV}{dz} = \frac{-\rho_o z}{\varepsilon} + A$$

Al integrar una vez más se obtiene

$$V = -\frac{\rho_o z^2}{2\varepsilon} + Az + B$$

3.6 Ecuación de Laplace y Poisson

donde A y B son constantes de integración por determinar mediante la aplicación de las condiciones en la frontera. Cuando $z = 0, V = V_o$,

$$V_o = -0 + 0 + B \rightarrow B = V_o$$

Cuando $z = d, V = 0$,

$$0 = -\frac{\rho_o d^2}{2\varepsilon} + Ad + V_o$$

o

$$A = \frac{\rho_o d}{2\varepsilon} - \frac{V_o}{d}$$

El campo eléctrico está dado por

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz}\mathbf{a}_z = \left(\frac{\rho_o z}{\varepsilon} - A\right)\mathbf{a}_z$$

$$= \left[\frac{V_o}{d} + \frac{\rho_o}{\varepsilon}\left(z - \frac{d}{2}\right)\right]\mathbf{a}_z$$