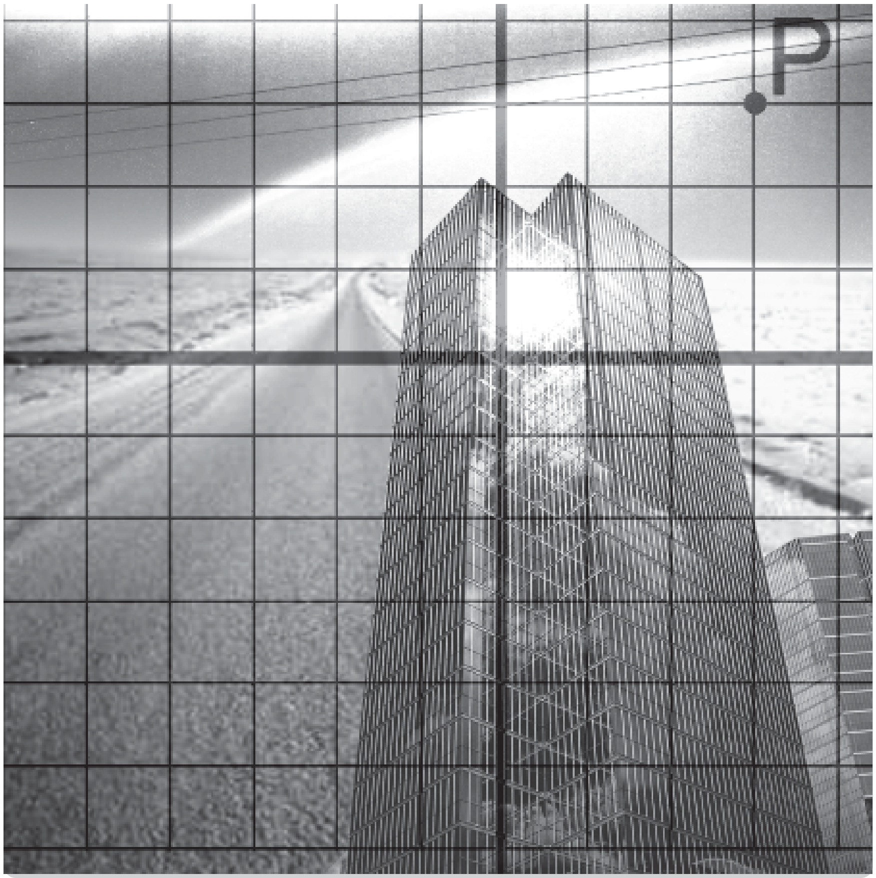



# Capítulo 2
# Elementos básicos de la geometría

## Contenido breve

**Módulo 7**
Postulados

**Módulo 8**
Segmentos

**Módulo 9**
Ángulos

**Módulo 10**
Polígonos

**Autoevaluación**
Capítulo 2, módulos 7 al 10

## Presentación

Como toda ciencia, la geometría tiene en sus inicios unos términos primitivos o no definidos que se relacionan entre sí para formar la estructura sólida. Uno de los términos que están relacionados con los términos primitivos son los postulados, y son precisamente ellos los que inician este capítulo para poder establecer un orden y un rigor lógico posterior. Luego se presentan términos ya definidos, basados en los primitivos, y propiedades que se van generando, tales como la medida, la congruencia y la igualdad, tanto de segmentos como de ángulos. Por último se estudian las características generales que presentan los polígonos y la circunferencia.

# Módulo 7

## Postulados

### Contenidos del módulo

7.1 Postulados de incidencia
7.2 Postulados de orden

### Objetivos del módulo

1. Identificar los términos primitivos.
2. Diferenciar un postulado de un teorema o un corolario.
3. Aplicar los postulados en las demostraciones de proposiciones.
4. Manejar los conceptos y notaciones de los elementos básicos de la geometría.

### Preguntas básicas

1. ¿Qué son términos primitivos?
2. ¿Qué relación hay entre ellos?
3. ¿Cómo se pueden ordenar las partes?
4. ¿Cómo se relacionan entre sí los términos más primitivos?
5. ¿Cuál es la diferencia entre segmento, rayo, semirrecta, plano y semiplano?

### Introducción

Vimos en el capítulo anterior que sólo existían en geometría los elementos primitivos llamados punto, recta, plano, de los cuales tenemos una idea intuitiva y aceptamos su existencia y con respecto a los cuales se dan ciertas relaciones primitivas de pertenencia (estar en), colinealidad (entre), congruencia. Estos términos y relaciones primitivas se pueden relacionar entre sí mediante enunciados tales como:

El punto $M$ está en la recta $L$.
El punto $P$ está entre los puntos $M$ y $N$ de la recta $L$.

Con base en los términos primitivos y las relaciones podemos empezar el proceso deductivo de la geometría, no sólo presentando los postulados sino deduciendo además los teoremas que se desprenden de ellos y dando las definiciones que sean necesarias.

Los postulados los podemos clasificar como postulados de incidencia (existencia y enlace), de orden (estar en), de congruencia (igualdad según Euclides), continuidad y paralelismo.

**Euclides**

(fl. 300 a.C.). Matemático griego, famoso por sus tratados de geometría.

Vea el módulo 7 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

## 7.1 Postulados de incidencia

Son los postulados que nos manifiestan la existencia de los elementos primitivos y los enlaces entre ellos.

**Postulado 7.1.1 (Postulado de la recta)**
Dos puntos diferentes determinan una *recta* a la cual pertenecen.

**Notación**
Los puntos los designamos con letras latinas mayúsculas: $A, B, C, \cdots$. La recta la representamos gráficamente como en la figura 7.1.

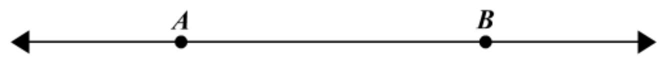



Figura 7.1

Simbólicamente la podemos nombrar como la recta $\ell$ (con letra minúscula) o con dos puntos de la recta y escribimos la recta *AB*, o bien: $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BA}$.

## Definición 7.1.1: Colinealidad

Tres o más puntos están alineados o son *colineales* si y sólo si están en una misma recta.

**Postulado 7.1.2**
A toda recta pertenecen al menos dos puntos diferentes.

**Postulado 7.1.3**
Dada una recta, existe por lo menos un punto que no está en la recta.

**Postulado 7.1.4 (Postulado del plano)**
Tres puntos no colineales determinan un plano y sólo uno al cual pertenecen. Gráficamente representamos un plano como en la figura 7.2 y lo nombramos como plano *M* o plano $\alpha$.

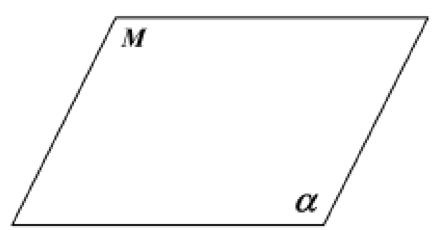



Figura 7.2

## Definición 7.1.2: Coplanar

Cuatro o más puntos son *coplanares* si y sólo si están en un mismo plano.

**Postulado 7.1.5**
Si dos puntos diferentes de una recta están en un plano, entonces la recta entera está contenida en el plano.

**Postulado 7.1.6**
Si dos planos diferentes tienen un punto común, entonces tienen por los menos otro punto común.

El postulado 7.1.2 establece que la intersección de dos planos diferentes es una recta. ¿Por qué?

## Definición 7.1.3
Dos rectas se intersecan o se cortan si y sólo si tienen un punto común.

## Definición 7.1.4
Dos rectas que se cortan en un punto se llaman rectas *incidentes*.

**Postulado 7.1.7**
Dado un plano, existe por lo menos un punto que no está en el plano.

**Postulado 7.1.8 (Postulado del espacio)**
Cuatro puntos no coplanares determinan el espacio.

## Definición 7.1.5
El *espacio* es el conjunto de todos los puntos.

## Definición 7.1.6
Una *figura geométrica* es un conjunto no vacío de puntos.

## Definición 7.1.7
Dos figuras geométricas $F_1$ y $F_2$ son iguales si y sólo si coinciden en todos sus puntos, y escribimos $F_1 = F_2$.

# 7.2 Postulados de orden

Con estos postulados vamos a ordenar los puntos y a establecer relaciones entre ellos, como la de "estar entre", una de las relaciones primitivas.

Si en una recta escogemos tres puntos $M, N, P$ y el punto $N$ está entre los otros dos, podemos decir que $N$ está entre $M$ y $P$, o bien que $N$ está entre $P$ y $M$ y lo representamos gráficamente como en la figura 7.3.

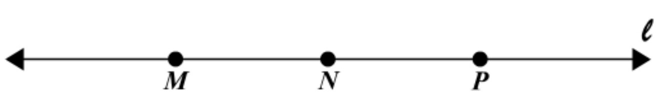



**Figura 7.3**

Lo importante es que $N$ esté entre los dos puntos. Simbólicamente escribimos $M - N - P$, o bien $P - N - M$.

**Euclides**

Su obra máxima, *Elementos de geometría*, es una compilación de obras de autores anteriores (entre los que destaca Hipócrates de Quíos). *Elementos* contiene un extenso tratado de matemáticas en trece volúmenes. Los seis primeros corresponden a lo que se entiende como geometría elemental; en ellos Euclides recoge las técnicas geométricas utilizadas por los pitagóricos para resolver ejemplos de ecuaciones lineales y cuadráticas, e incluyen también la teoría general de la proporción. Los libros del séptimo al décimo tratan de cuestiones numéricas y los tres restantes se ocupan de la geometría de los sólidos, hasta culminar en la construcción de los cinco poliedros regulares y sus esferas circunscritas, que había sido ya objeto de estudio por parte de Teeteto.

Los *Cálculos* (una colección de teoremas geométricos), los *Fenómenos* (una descripción del firmamento), la *Óptica*, la *División del canon* (un estudio matemático de la música) y otros libros se han atribuido durante mucho tiempo a Euclides.

Euclides estableció lo que había de ser la forma clásica de una proposición matemática: un enunciado deducido lógicamente a partir de unos principios previamente aceptados.

**Postulado 7.2.1**
Dados dos puntos diferentes $M$ y $N$ de una recta $\ell$, existe por lo menos un punto $P$ de la recta tal que $P$ está entre $M$ y $N$, y escribimos $M - P - N$ (figura 7.4).

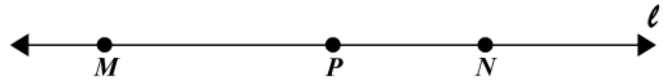



Figura 7.4

**Nota:** si $P$ está entre $M$ y $N$ $(M - P - N)$, entonces $M$ es diferente de $N$.

**Postulado 7.2.2**
Dados dos puntos diferentes $M$ y $N$ de una recta $\ell$, existe por lo menos un punto $Q$ sobre la recta $\ell$ tal que $N$ está entre $M$ y $Q$ (figura 7.5), y escribimos $M - N - Q$.

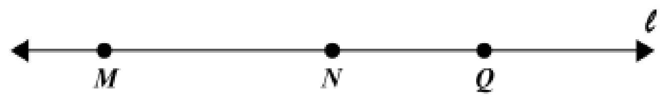



Figura 7.5

**Postulado 7.2.3**
Dados dos puntos diferentes $M$ y $N$ de una recta $\ell$, existe por lo menos un punto $K$ sobre la recta tal que $M$ está entre $K$ y $N$ (figura 7.6), y escribimos $K - M - N$.


Figura 7.6

**Postulado 7.2.4**
Dados tres puntos diferentes de una recta, uno y sólo uno de ellos está entre los otros dos. Este postulado establece que si $A - C - B$, entonces $B - C - A$, pero no $C - A - B$ ni $A - B - C$.

**Nota:** si $A$, $B$, $C$ son puntos sobre una recta y en ese orden, podemos decir que $A$ "precede" a $B$, y $B$ precede a $C$, $A$ precede entonces a $C$, lo cual simbolizamos por $A - B - C$.

**Postulado 7.2.5**
Si $N$ está entre $M$ y $P$, y $X$ está entre $N$ y $P$, entonces $X$ está entre $M$ y $P$ (figura 7.7).

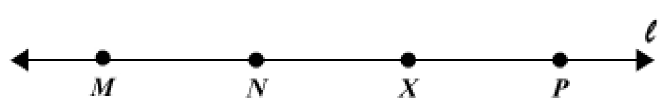



Figura 7.7

## Definición 7.2.1: Segmento rectilíneo

Sean $A$ y $B$ dos puntos diferentes de una recta. Al conjunto formado por $A$ y $B$ y los puntos de la recta que están entre $A$ y $B$ se le llama segmento *rectilíneo* $AB$ y lo denotamos $\overline{AB}$ (figura 7.8).

Los puntos $A$ y $B$ son los extremos del segmento y no importa cuál de ellos escribimos primero, o sea que $\overline{AB} \equiv \overline{BA}$. Los puntos de la recta entre $A$ y $B$ son el interior del segmento y lo denotamos $\overset{\circ\!-\!\circ}{AB}$.

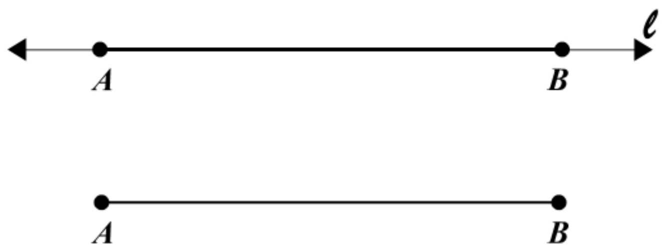



**Figura 7.8**

Si $A$ y $B$ representan el mismo punto decimos que $\overline{AB} = \overline{AA} = \overline{BB}$ es el segmento nulo.

**Postulado 7.2.6 (De la separación de la recta)**
Sea $O$ un punto de una recta $\ell$, los demás puntos de la recta forman dos conjuntos $M$, $N$ (figura 7.9), tales que:

a. Su intersección es el vacío: $M \cap N = \phi$.

b. Si $A \in M$ y $B \in M$, entonces $\overline{AB}$ está contenido en $M$, y si $C \in N$ y $D \in N$, entonces $\overline{CD}$ está contenido en $N$.

c. Si $A \in M$ y $C \in N$, entonces $O \in \overline{AC}$. Es decir, $A - O - C$ (figura 7.9).

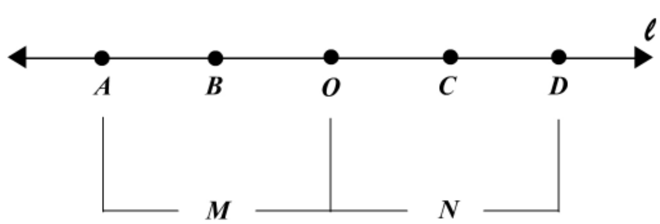



**Figura 7.9**

d. $M \cup \{O\} \cup N =$ recta $\ell$.

## Definición 7.2.2: Semirrecta

Un punto $O$ de una recta $\ell$ y los puntos $X$ de la recta que están a un mismo lado de $O$ determinan el *rayo OX* (figura 7.10) y lo denotamos $\overrightarrow{OX}$. Si no se incluye el punto

$O$ tenemos la *semirrecta OX* y la denotamos $\overset{\circ\longrightarrow}{OX}$.

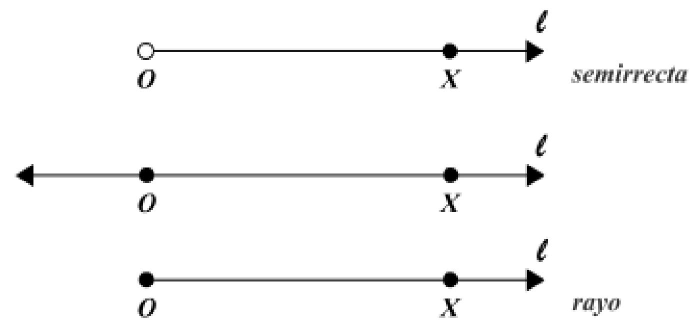



**Figura 7.10**

Como podemos observar de la figura 7.10, la semirrecta $OX$ es diferente de la semirrecta $XO$, es decir, $\overset{\circ\longrightarrow}{OX} \neq \overset{\circ\longrightarrow}{XO}$, al igual que los rayos $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{XO}$.

En el postulado de la separación de la recta (figura 7.9) los conjuntos $M$ y $N$ son las semirrectas $\overset{\circ\longrightarrow}{OA}, \overset{\circ\longrightarrow}{OC}$.

Si $O$, $A$ y $B$ son puntos colineales y $A-O-B$, decimos que $\overset{\circ\longrightarrow}{OA}$ y $\overset{\circ\longrightarrow}{OB}$ son semirrectas opuestas (figura 7.11) y que $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son rayos opuestos.

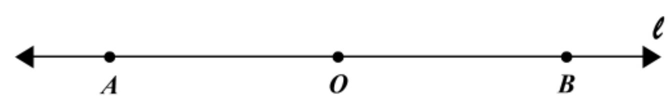



**Figura 7.11**

## Definición 7.2.3: Semiplano

Toda recta $\ell$, de un plano $M$, determina dos conjuntos llamados *semiplanos*. La recta se llama borde o frontera del semiplano y no pertenece al semiplano (figura 7.12).

A los semiplanos los nombramos por medio de la recta y un punto de uno de los semiplanos. Así, los semiplanos $\alpha_1$ y $\alpha_2$ de la figura 7.12 los nombramos así: semiplano $\alpha_1$ por $\ell(A)$; semiplano $\alpha_2$ por $\ell(C)$.

Si los puntos $A$ y $B$ están en un mismo semiplano $\ell(A)$, entonces $\overline{AB}$ está contenido en el mismo semiplano. Lo mismo ocurre con $\overline{CD}$ en el semiplano $\alpha_2$.

Si los puntos $B$ y $C$ están en diferentes semiplanos, entonces $\overline{BC}$ corta a la recta $\ell$ en $P$.

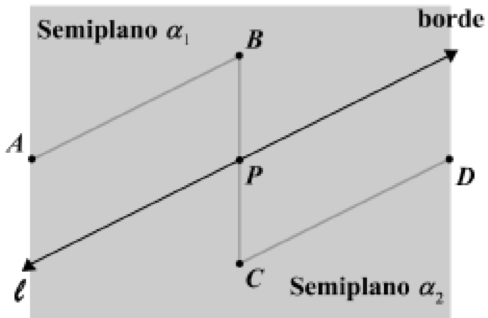



Figura 7.12

**Postulado 7.2.7 (De la separación del plano)**

Sea $\ell$ una recta de un plano *M*, los demás puntos del plano (diferentes a los de la recta) forman dos conjuntos $\alpha_1$ y $\alpha_2$ disjuntos tales que (figura 7.12):

a. $\alpha_1 \cap \ell = \alpha_2 \cap \ell = \alpha_1 \cap \alpha_2 = \phi$ .

b. $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \ell =$ plano.

c. Si $B \in \alpha_1$ y $C \in \alpha_2$ , entonces $\overline{BC}$ corta la recta $\ell$ en un punto *P*.

d. Si $A \in \alpha_1$ y $B \in \alpha_1$ , entonces $\overline{AB}$ está en el semiplano $\ell(A)$ .

e. Si $C \in \alpha_2$ y $D \in \alpha_2$ , entonces $\overline{CD}$ está en el semiplano $\ell(C)$ .

Así como el punto separa a la recta y la recta al plano, el plano separa al espacio en dos conjuntos disjuntos llamados semiespacios. El plano que los separa se llama cara de cada uno de ellos.

## Definición 7.2.4

Un conjunto de puntos *M* del plano es *convexo* si y sólo si para cada par de puntos *P* y *Q* de *M* el segmento $\overline{PQ}$ está contenido en *M*. En caso contrario decimos que es *no convexo*.

Los siguientes conjuntos de puntos del plano son convexos (figura 7.13):

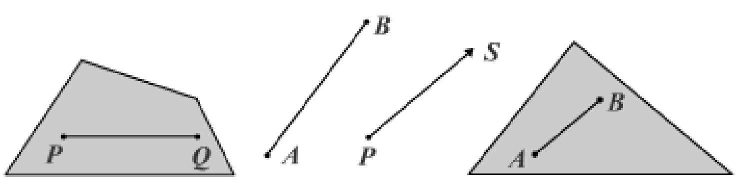



Figura 7.13

En la figura 7.14 se muestran regiones del plano que no son convexas.

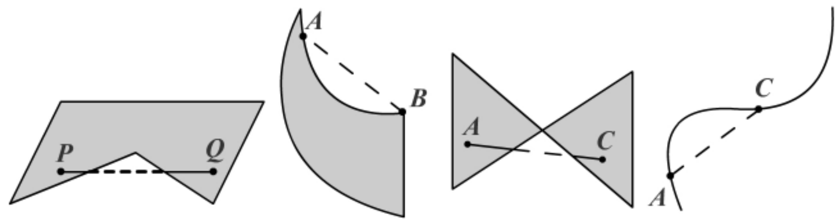



Figura 7.14

El punto, el segmento, la semirrecta, la recta, el plano y el espacio son conjuntos convexos.

# Ejercicios

## Módulo 7

1. En cada uno de los siguientes casos determine si la proposición es verdadera o es falsa.

   - La unión de dos conjuntos no puede ser el conjunto vacío.
   - La intersección de dos planos puede ser un segmento.
   - Un plano contiene por lo menos tres puntos.
   - Dos rectas se pueden cortar en dos puntos diferentes.
   - $\ell$ es una recta. Si $\overline{AB} \cap \ell = \phi$ y $\overline{BC} \cap \ell = \phi$, entonces $\overline{AC} \cap \ell = \phi$.
   - Si $\overline{AB} \cap \ell \neq \phi$ y $\overline{BC} \cap \ell = \phi$, entonces $\overline{AC} \cap \ell \neq \phi$.
   - Si $\overline{AB} \cap \ell \neq \phi$, entonces $A$ y $B$ se encuentran en semiplanos diferentes.
   - Si $M$ pertenece al semiplano $\ell(A)$, entonces $\overline{AM}$ corta a la recta $\ell$.
   - La unión de dos semiplanos es un semiplano.
   - La unión de dos semirrectas es una recta.
   - Si $N$ no está entre $M$ y $P$, entonces $P$ está entre $M$ y $N$.
   - La semirrecta $AB$ tiene punto inicial y punto terminal.
   - Si $\overline{AB} = \overline{BA}$, entonces $A = B$.
   - La recta tiene extremos.
   - Toda recta está contenida en un plano.

Con base en los postulados responda cada una de las siguientes preguntas (2 a 7).

2. ¿Cuántos puntos contiene un segmento? ¿Una recta?

3. ¿Cuántas rectas pueden pasar por un punto dado? ¿Cuántos planos?

4. ¿Cuántas rectas pueden pasar por dos puntos diferentes? ¿Cuántos planos?

5. ¿Por tres puntos diferentes cuántas rectas pueden pasar? ¿Cuántos planos?

6. Tres puntos diferentes *A*, *B*, *C* en un plano, ¿cuántos segmentos determinan? ¿Cuántas semirrectas?

   a. Si son colineales.
   b. Si no son colineales.

7. Cuatro puntos *A*, *B*, *C*, *D* coplanarios tres a tres:

   a. ¿Cuántos segmentos determinan?
   b. ¿Cuántas semirrectas determinan?
   c. ¿Cuántos planos determinan?

Con base en los postulados justifique las siguientes proposiciones.

8. Una recta y un punto exterior a ella determinan un único plano que las contiene.

9. Dos rectas incidentes determinan un único plano que las contiene.

10. El punto donde se cortan dos rectas es único.

# Módulo 8

## Segmentos

### Contenidos del módulo

8.1 Medida de segmentos.

### Objetivos del módulo

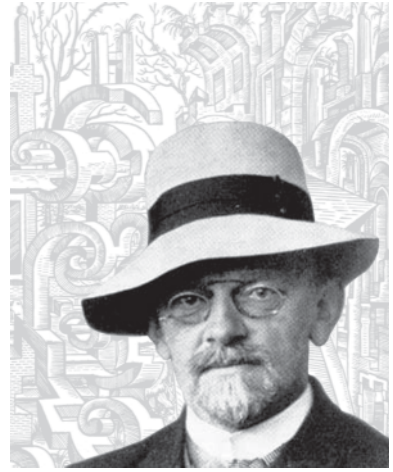
1. Diferenciar un segmento de su medida.
2. Identificar los tipos de segmentos.
3. Enunciar las propiedades de las medidas del segmento.
4. Construir un segmento.
5. Diferenciar entre congruencia e igualdad.
6. Determinar si un punto es o no punto medio de un segmento.
7. Sumar y restar segmentos.

### Preguntas básicas

1. ¿Cuál es la medida de un segmento?
2. ¿Qué propiedades tiene la medida de segmentos?
3. ¿Cómo se construye un segmento?
4. ¿Qué son segmentos congruentes?
5. ¿Cuándo dos segmentos son iguales?
6. ¿Cuándo un punto es punto medio de un segmento?
7. ¿Qué operaciones se hacen con segmentos?

### Introducción

Uno de los elementos más usados en la geometría es el segmento rectilíneo y muy especialmente su medida, no sólo en teoremas que se van a demostrar sino también en problemas de cálculo numérico. Con este módulo se inicia esa parte operativa de la geometría y la aplicación de postulados aceptados y teoremas demostrados.



**David Hilbert**

(1862-1943). Matemático y filósofo alemán nacido en Königsberg (hoy Kaliningrado, Rusia).

Vea el módulo 8 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

## 8.1 Medida de segmentos

Dados los conjuntos infinitos de igual número de elementos, es posible asociar cada elemento de un conjunto, exactamente, con un elemento del otro; decimos entonces que hay una correspondencia biunívoca entre los elementos de los dos conjuntos. Podemos entonces establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y los números reales, diciendo que a cada punto de la recta le corresponde uno y sólo un número real y a cada número real le corresponde un único punto de la recta.

En geometría nos referimos a menudo a la "distancia" entre los puntos $A$ y $B$ o bien a la medida del segmento $AB$.

**Postulado 8.1.1 (De la distancia)**
A cada par de puntos diferentes les corresponde un único número real no negativo.

## Definición 8.1.1

A cada par de puntos diferentes $A$ y $B$ corresponde un único número real no negativo llamado la *distancia* entre $A$ y $B$, o también la *medida* del segmento $AB$ y la cual denotamos como $d(A,B)=m(\overline{AB})$.

La distancia entre dos puntos o la medida del segmento determinado por ellos tiene las siguientes propiedades:

a. $m(\overline{AB})=d(A,B)\geq 0$.

b. $m(\overline{AB})=m(\overline{BA})=d(A,B)=d(B,A)$.

c. $m(\overline{AB})=d(A,B)=0$ si y sólo si $A$ coincide con $B\left(A=B\right)$.

La propiedad (c) nos dice que al segmento nulo (o al punto) le asignamos una medida cero.

Para abreviar en la nomenclatura de la $d(A,B)=m(\overline{AB})$, escribimos simplemente $AB$. Debemos tener presente que cuando escribimos $\overline{AB}$ nos referimos a la figura geométrica del segmento y con $AB$ nos referimos a un número que es la medida o longitud del segmento $AB$.

Para medir un segmento o determinar la distancia entre dos puntos $A$ y $B$ debemos escoger una unidad de longitud o de medida: decímetro, metro, yarda, pulgada, pie, etc. Hay problemas en los cuales se mencionan varias unidades, pero siempre debemos trabajar en una cualquiera (todas se reducen a la unidad escogida).

Supongamos que tenemos los puntos $A$ y $B$ y una regla con marcas en cm (figura 8.1):

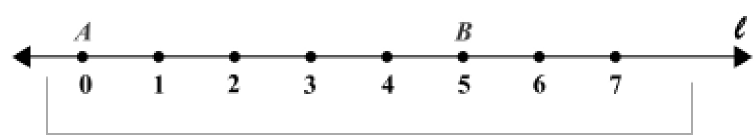



Figura 8.1

Es claro que la distancia entre $A$ y $B$ no depende de cuál de los dos puntos se nombre primero, $d(A,B)=d(B,A)$, ni de la colocación de la regla.

Si ponemos la regla de tal manera que el cero coincida con $A$, es fácil hacer la lectura y vemos que la distancia es 5 cm.

Si ponemos la regla de tal manera que el 4 coincida con $A$, vemos que al punto $B$ le corresponde el 9. En este caso la distancia entre $A$ y $B$ será $9-4=5$ cm (figura 8.2). También podemos hacer esta lectura como $4-9=-5$, pero como la distancia siempre es positiva tomamos el valor absoluto de la diferencia entre los números y tenemos así la siguiente definición de distancia.

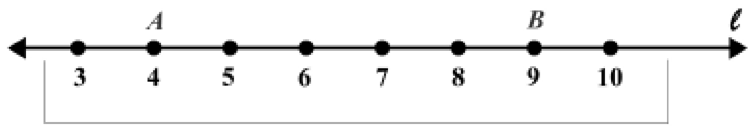



Figura 8.2

## Definición 8.1.2

La distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la diferencia entre los números reales correspondientes.

**Ejemplo 8.1.1**

En la figura 8.3 consideremos los puntos *A, B, C, D, E* y encontremos algunas distancias o medidas de los segmentos determinados.

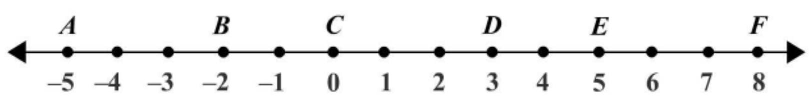



Figura 8.3

**Solución**

De la figura obtenemos:

$$AB=|-5-(-2)|=|-5+2|=|-3|=3$$

$$AC=|-5-0|=|-5|=5$$

$$BD=|-2-3|=|-5|=5$$

$$DE=|3-5|=|5-3|=2$$

$$BF=|-2-8|=|8-(-2)|=|-10|=|10|=10$$

## Definición 8.1.3

En la recta real el número que le corresponde a un punto se llama *coordenada* del punto. Así, en el ejemplo 8.1.1 la coordenada de $A$ es $-5$, la coordenada de $B$ es $-2$ y la del punto $E$ es 5. Vemos entonces que la distancia entre dos puntos de la recta

**David Hilbert**

Aunque Hilbert trabajó en diversos campos de las matemáticas, que incluyen la teoría de números y el cálculo de variaciones, es particularmente famoso por sus contribuciones a la geometría, pues reemplazó toda la estructura geométrica euclidiana mediante un conjunto de 21 axiomas mucho más completos y abstractos, relacionados con puntos, líneas y planos. Las contribuciones que hizo quedaron plasmadas en su obra magna, *Fundamentos de la geometría*.

real es el valor absoluto de la diferencia entre las coordenadas correspondientes.

**Postulado 8.1.2 (De la situación de puntos)**

Sea *AB* un rayo y *n* un número real, entonces existe un único punto *M* en $\overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AM} = n$.

**Postulado 8.1.3 (De la adición de segmentos)**
Sí *A, B, C* son colineales en ese orden: $A-B-C$, entonces $AC = AB + BC$.

## Teorema 8.1.1: Desigualdad de segmentos

Si $A-B-C$ , entonces $AB < AC$.

**Demostración (reducción al absurdo)**

Supongamos que $AB \not< AC$. Por la ley de tricotomía tenemos que $AB = AC$ o $AB > AC$. Si $AB = AC$ , entonces *B* coincide con *C* y sería imposible porque $A-B-C$ (se estaría contradiciendo el postulado 7.2.4). Luego $AB \neq AC$ . Si $AB > AC$, entonces $A-C-B$, lo cual sería imposible porque $A-B-C$ (se estaría contradiciendo el postulado 7.2.4). Luego $AB > AC$.

Como $AB \not> AC$ y $AB \neq AC$, por la ley de tricotonomía $AB < AC$, única alternativa.

No todos los teoremas que enunciamos se demostrarán; en tales casos la demostración se dejará como ejercicio.

## Teorema 8.1.2

Sean *M* y *N* dos puntos de $\overrightarrow{AB}$ . Si $AM < MN$, entonces $A-M-N$.

## Teorema 8.1.3

Dados una recta y un rayo que tiene su punto inicial sobre la recta pero sus otros puntos están fuera de la recta, entonces todos los puntos del rayo, excepto el punto inicial, están en el mismo semiplano de borde la recta dada. En la figura 8.4 se ilustra la situación. Sean *m* la recta y $\overrightarrow{PQ}$ el rayo que tiene su punto inicial *P* en la recta *m*.

**Demostración (reducción al absurdo)**

Supongamos que $\overrightarrow{PQ}$ tiene un punto *R* tal que *R* y *Q* están en semiplanos opuestos respecto a la recta *m*, entonces $\overrightarrow{RQ}$ corta a la recta *m* en un punto *T* (postulado de la separación del plano). Como $R-P-T$ , entonces $\overrightarrow{RQ}$ corta también a la recta *m* en *P*, lo cual es una contradicción porque dos rectas se cortan en un punto y por consiguiente los puntos de $\overrightarrow{PQ}$ diferentes de *P* están en el semiplano $m(Q)$ .

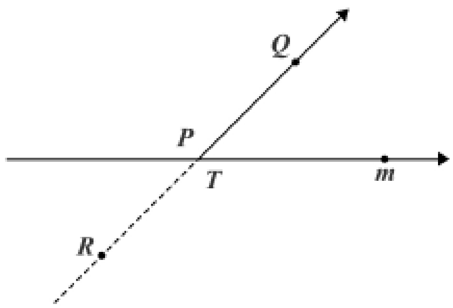



**Figura 8.4**

Sabemos que si dos segmentos son iguales, entonces tienen igual medida. Puede ocurrir que dos segmentos tengan igual medida y no necesariamente ser iguales, por ejemplo, dos lápices o minas pueden tener la misma longitud o medida y no necesariamente ser iguales; el nuevo concepto en la geometría hace referencia a este situación.

## Definición 8.1.4: Congruencia

Dos segmentos *AB* y *CD* son *congruentes* si y sólo si tienen igual medida, y escribimos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow AB = CD.$

La congruencia se refiere por tanto a la figura geométrica.

Las propiedades de la congruencia del segmento se enuncian en el siguiente teorema.

## Teorema 8.1.4

a. Todo segmento es congruente consigo mismo: $\overline{AB} \cong \overline{BA}$ (propiedad reflexiva).

b. Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ (propiedad simétrica).

c. Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ (propiedad transitiva).

Decimos entonces que la congruencia de segmentos es una relación de equivalencia.

## Definición 8.1.5: Punto medio

Sea $A - M - B$. *M* es *punto medio* de $\overline{AB}$ si y sólo si divide a $\overline{AB}$ en dos segmentos congruentes, $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ (figura 8.5).

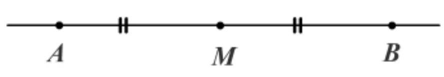



**Figura 8.5**

Si *M* es punto medio de $\overline{AB}$, de acuerdo con la definición tenemos que $AM = MB = \frac{1}{2} AB$.

## Teorema 8.1.5

El punto medio de un segmento es único.

**Demostración (reducción al absurdo)**

Sea $\overline{AB}$ y $M$ el punto medio de $\overline{AB}.$ Supongamos que el punto $M$ no es único; sea $P$ otro punto medio de $\overline{AB},$ entonces $AP = PB = \frac{1}{2}AB.$ Como $AM = MB = \frac{1}{2}AB$ ($M$ es punto medio de $\overline{AB}$), tenemos una contradicción con el postulado de la situación de puntos $(AP = AM).$ Luego $M$ es único.

**Postulado 8.1.4 (De la construcción de segmentos)**

Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo y $\overline{MP}$ un segmento cualquiera, entonces existe un único punto $Q \in \overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{MP} \cong \overline{AQ}$ (figura 8.6).

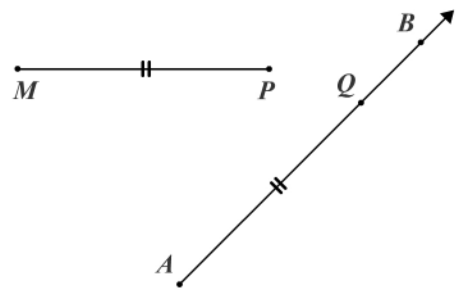



Figura 8.6

## Teorema 8.1.6: Adición de segmentos

Sean $A-B-C$ y $M-N-P.$ Si $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ y $\overline{BC} \cong \overline{NP},$ entonces $\overline{AC} \cong \overline{MP}$ (figura 8.7).

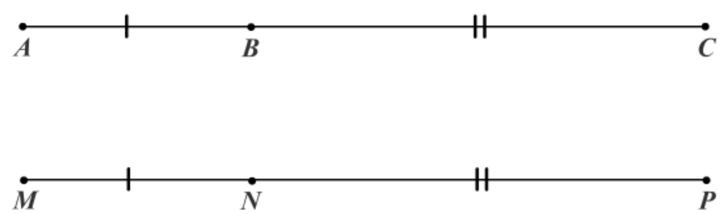



Figura 8.7

**Demostración**

Por la definición de congruencia, $AB = MN$ y $BC = NP.$ Por el postulado de la adición de segmentos tenemos $AC = AB + BC$ y $MP = MN + NP.$ Si sustituimos las medidas en $AC,$ obtenemos $AC = MN + NP.$ Luego $\overline{AC} \cong \overline{MP}$ porque tienen igual medida.

## Teorema 8.1.7: Sustracción de segmentos

Sean $A-B-C$ y $M-N-P$. Si $\overline{AC} \cong \overline{MP}$ y $\overline{AB} \cong \overline{MN}$, entonces $\overline{BC} \cong \overline{NP}$.

## Teorema 8.1.8

Los puntos medios de segmentos congruentes determinan segmentos congruentes.

**Ejemplo 8.1.2**

*A, B, C, D* son puntos colineales en ese orden. Si *M* y *N* son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente (figura 8.8), entonces $MN = \dfrac{AC+BD}{2}$.

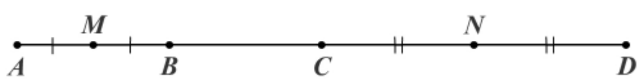



Figura 8.8

1. $AM = MB = AB/2$ ; $CN = ND = CD/2$, por ser *M* y *N* puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Como $A-B-C-D$, por el postulado de la adición de segmentos tenemos:

2. $MN = MB + BC + CN$.

   Si sustituimos 1 en 2, obtenemos:
   $MN = 1/2\,AB + BC + 1/2\,CD$, y aplicando propiedades de los reales llegamos a:
   $MN = \dfrac{(AB+BC)+(BC+CD)}{2}$; por adición de segmentos: $MN = \dfrac{AC+BD}{2}$.

# Ejercicios
## Módulo 8

1. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.

- Dos rectas son congruentes si y sólo si tienen igual longitud.
- Dos rectas son congruentes si y sólo si coinciden en todos sus puntos.
- Dos rectas no pueden ser congruentes.
- Sea $M \in \overline{AB}$. Si $\overline{AM} \cong \overline{MB}$, entonces $M$ es punto medio de $\overline{AB}$.
- Si $m(\overline{AB}) + m(\overline{AC}) = m(\overline{BC})$, entonces $A - B - C$.
- Si $A, B, C, D$ son colineales, entonces $AD = AC + BD$.
- Si $\overline{AC} \cong \overline{CB}$, entonces $C$ es punto medio de $\overline{AB}$.
- Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\overline{AB} = \overline{CD}$.
- Si $AB = CD$, entonces $\overline{AB} = \overline{CD}$.
- Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $AB = CD$.
- Si $\overline{AB} = \overline{CD}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
- Si $\overline{AB} = \overline{CD}$, entonces $AB = CD$.

Sobre una recta se dan unos puntos con sus coordenadas correspondientes, como se indica en la figura 1. Con base en esa información responda las preguntas 2 a 14 de la tabla adjunta, además de las preguntas 15 a 17.

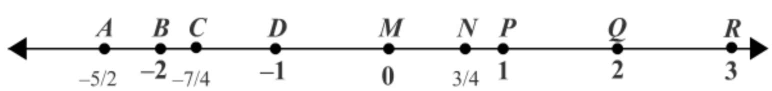



Figura 1

| | | |
|---|---|---|
| 2. $m\left(\overline{NP}\right) =$ | 3. $m\left(\overline{RN}\right) =$ | 4. $m\left(\overline{DP}\right) =$ |
| 5. $m\left(\overline{CN}\right) =$ | 6. $m\left(\overline{AD}\right) =$ | 7. $m\left(\overline{NA}\right) =$ |
| 8. $m\left(\overline{AC}\right) =$ | 9. $m\left(\overline{QC}\right) =$ | 10. $m\left(\overline{RB}\right) =$ |
| 11. $m\left(\overline{BM} \cup \overline{DM}\right) =$ | 12. $m\left(\overrightarrow{CP} \cup \overrightarrow{NA}\right) =$ | 13. $m\left(\overline{DQ} - \overline{BM}\right) =$ |
| 14. $m\left(\overline{AM} \cup \overline{MR}\right) =$ | | |

15. La coordenada del punto medio de $\overline{MR}$ es:

16. La coordenada del punto medio de $\overline{AR}$ es:

17. La coordenada del punto medio de $\overline{CQ}$ es:

18. Sean $A, B, C, D$ cuatro puntos colineales en ese orden. Si $AB = CD = m$, $BC = n$, ¿entonces el punto medio de $\overline{BC}$ y de $\overline{AD}$ es el mismo?

19. Demuestre el teorema 8.1.2.

20. Demuestre el teorema 8.1.7.

21. Demuestre el teorema 8.1.8.

# Módulo 9

## Ángulos

### Contenidos del módulo

9.1 Ángulos
9.2 Medida de ángulos
9.3 Clases de ángulos

### Objetivos del módulo

1. Definir un ángulo.
2. Denotar un ángulo.
3. Medir un ángulo.
4. Diferenciar entre congruencia, medida, igualdad de ángulos.
5. Identificar las clases de ángulos.
6. Identificar la bisectriz de un ángulo.
7. Resolver problemas sobre ángulos.
8. Identificar rectas perpendiculares.

### Preguntas básicas

1. ¿Cuáles son los elementos de un ángulo?
2. ¿Qué es la medida de un ángulo?
3. ¿Cómo se mide un ángulo?
4. ¿Cuándo dos ángulos son congruentes?
5. ¿Cuándo dos ángulos son iguales?
6. ¿Qué clase de ángulos hay?
7. ¿Cuál es la bisectriz de un ángulo?
8. ¿Qué operaciones se desarrollan con ángulos?
9. ¿Qué es la mediatriz de un segmento?
10. ¿Cuándo dos rectas son perpendiculares?

### Introducción

Los ángulos son otra herramienta básica en la geometría, cuya aplicación se extiende a otras asignaturas como trigonometría, física, cálculo y muchos cursos profesionales. En esta sección se estudia lo necesario para el desarrollo de la geometría.

**Oswald Veblen**

(1880-1960). Matemático estadounidense nacido en Decorah (Iowa) y muerto en Brooklin (Nueva York).

Vea el módulo 9 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

## 9.1 Ángulos

### Definición 9.1.1

Un *ángulo* es la figura geométrica que resulta al unir dos rayos que tienen el mismo punto inicial. Los rayos son los lados del ángulo y el punto común es el vértice del ángulo (figura 9.1).

En la figura 9.1 la unión de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ es el ángulo $AOB$ de vértice $O$ y que denotamos $\angle AOB$, o $A\hat{O}B$, o $\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; si no hay lugar a confusión lo denotamos como ángulo $\angle O$ o bien $\hat{O}$. También podemos usar letras griegas y escribimos $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\theta},$ etc.

Si los dos rayos son opuestos (están en una misma recta), se obtiene *un ángulo llano* o *ángulo rectilíneo* (figura 9.2): $A\hat{O}B$ rectilíneo. Si los dos rayos coinciden, tenemos el *ángulo nulo* (figura 9.3): $A\hat{O}B$ nulo.

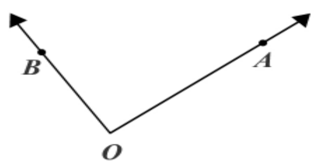



Figura 9.1

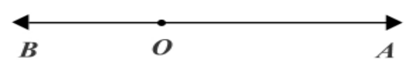



Figura 9.2

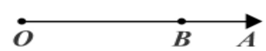



Figura 9.3

### Definición 9.1.2

Un ángulo no nulo ni rectilíneo divide al plano en dos conjuntos (regiones), uno convexo llamado *interior del ángulo* y otro no convexo llamado *exterior del ángulo* (figura 9.4).

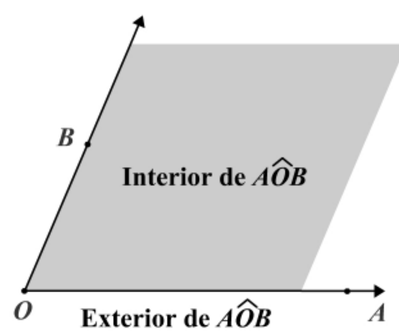



Figura 9.4

### Definición 9.1.3

El ángulo unido al interior del mismo se llama *región angular* (ángulo euclídeo), es decir:

región angular = $A\hat{O}B \cup \text{int}(A\hat{O}B)$.

**Nota:** el interior del ángulo se puede definir como la intersección de dos semiplanos, así:

$$\text{interior } A\hat{O}B = \overleftrightarrow{OA}(B) \cap \overleftrightarrow{OB}(A).$$

En el siguiente teorema se resumen algunas situaciones que se presentan en un ángulo.

## Teorema 9.1.1

a. Si $P$ es un punto de la recta $\ell$, entonces la simerrecta $PQ$ está contenida en el semiplano de borde $\ell$ y que contiene a $Q$: semiplano $\ell(Q)$ (figura 9.5).

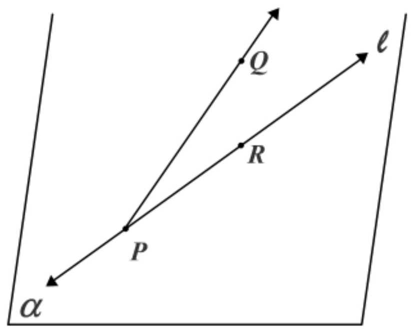



Figura 9.5

b. Si $Q$ es un punto interior del ángulo $AOB$, entonces $\overrightarrow{OQ}$ está contenida en la región angular (figura 9.6).

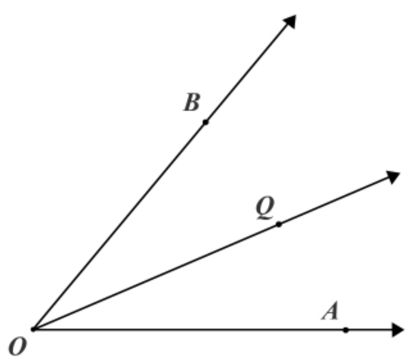



Figura 9.6

c. Dado un ángulo $AOB$, entonces el segmento $AB$ está contenido en la región angular (figura 9.7).

d. Si $P$ es un punto interior al ángulo $AOB$, entonces $\overrightarrow{OP}$ interseca a $\overline{AB}$ (figura 9.8).

**Oswald Veblen**

Oswald Veblen hizo grandes aportes al álgebra abstracta y dio el primer ejemplo de un plano proyectivo finito, es decir, un plano que no cumple con el teorema de Desargues. Desarrolló, además, un enfoque axiomático de la geometría. Escribió varios tratados sobre esta ciencia, entre los que se destacan *Geometría proyectiva*, *Fundamentos de la geometría diferencial* y *Analysis situs*. En esta última obra llevó a cabo una sistematización de las ideas desarrolladas por Jules Henri Poincaré.

En la Sociedad Matemática Americana, de la que este matemático fue presidente en 1923, se entrega anualmente el Premio Veblen en Geometría, establecido en 1964.

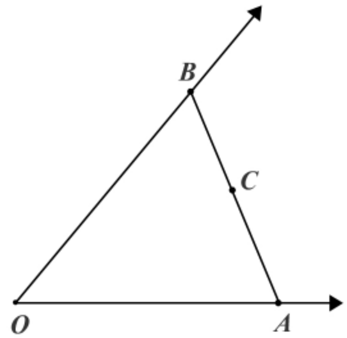



Figura 9.7

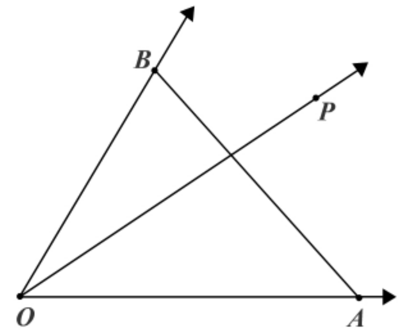



Figura 9.8

## 9.2 Medida de ángulos

Debemos expresar de alguna forma la "amplitud" o "abertura" que hay entre los lados de un ángulo. La unidad más usual para representar esa "abertura" de los lados es el "grado".

## Definición 9.2.1 De la medida de ángulos

A todo ángulo $AOB$ le corresponde un único número real entre 0 y 180 llamado medida, o medida en grados, del ángulo.

La medida del ángulo $AOB$ (en grados) se escribe $m(A\hat{O}B)$, y según la definición:

$$0° \leq m(A\hat{O}B) \leq 180°.$$

En el capítulo 4 estudiaremos ampliamente los círculos y los elementos relacionados con él; por el momento aceptemos una idea intuitiva de un grado y digamos que es una trescientas sesentava parte de una circunferencia, es decir:

$1° = {}^{1}\!/_{360}$, porque la circunferencia mide 360º.

Si el ángulo es llano o rectilíneo tiene una medida de 180º y la medida de un ángulo nulo es 0º.

Así como se usa una regla numerada para estimar la medida de un segmento, podemos determinar la medida de un ángulo con la ayuda de un transportador (figura 9.9).

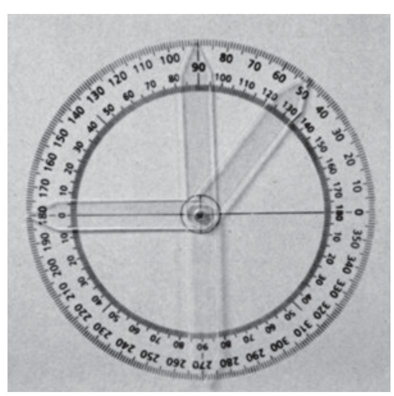


**Figura 9.9.** Transportador

**Postulado 9.2.1 (De la construcción del ángulo)**

Sea $\overleftrightarrow{AB}$ el borde de un semiplano $\alpha$. Para cada número real $n$ entre 0º y 180º existe un único rayo $\overrightarrow{AP}$ con $P$ en $\alpha$, tal que $m(B\hat{A}P) = n°$ (figura 9.10).

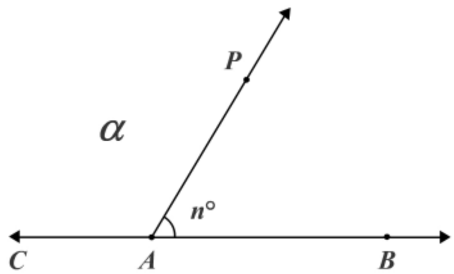



Figura 9.10

**Postulado 9.2.2 (De la adición de ángulos)**

Si $P$ es un punto en el interior del $A\hat{O}B$, entonces (figura 9.11):

$$m(A\hat{O}B) = m(A\hat{O}P) + m(P\hat{O}B)$$

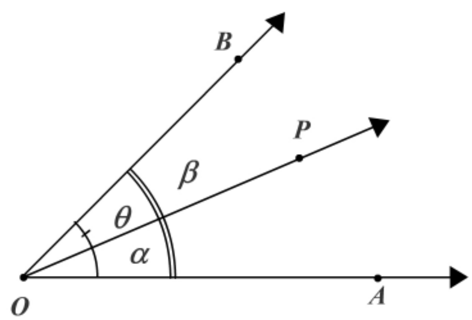



Figura 9.11

**Nota:** cuando usamos letras del alfabeto griego para denotar los ángulos, éstas facilitan mucho la nomenclatura para la medida de los mismos, ya que:

$\hat{\beta}$ se refiere a la figura del ángulo.

$\beta$ se refiere a la medida del ángulo.

Es decir, $\hat{\beta} \neq \beta$. En la figura 9.11 tenemos que $\beta = \alpha + \theta$.

## Definición 9.2.2: Congruencia de ángulos

Dos ángulos $AOB$ y $CDE$ son congruentes si y sólo si tienen igual medida, y escribimos $A\hat{O}B \cong C\hat{D}E$ (figura 9.12). Simbólicamente:

$A\hat{O}B \cong C\hat{D}E \Leftrightarrow m(A\hat{O}B) = m(C\hat{D}E)$.

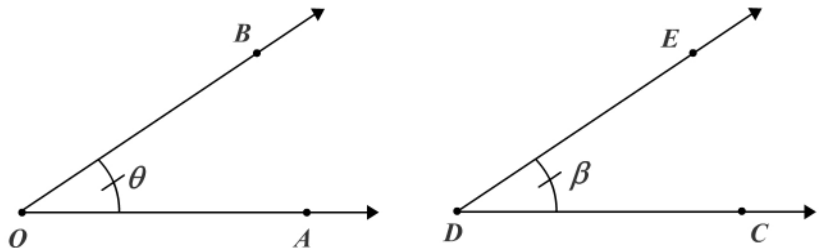



Figura 9.12

Los ángulos que son congruentes en una figura geométrica se representan con el mismo símbolo. Las propiedades de la congruencia de ángulos se enuncian en el siguiente teorema.

## Teorema 9.2.1

a. Todo ángulo es congruente consigo mismo:

$A\hat{O}B \cong A\hat{O}B$ (propiedad reflexiva).

b. El orden en que se enuncie la congruencia no afecta a ésta:

Si $A\hat{O}B \cong D\hat{E}F$, entonces $D\hat{E}F \cong A\hat{O}B$ (propiedad simétrica).

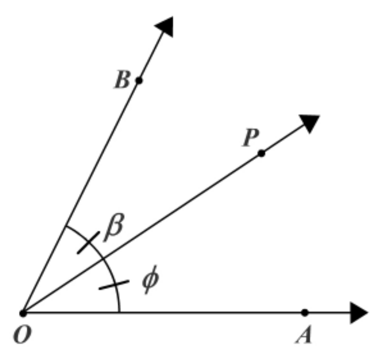
c. Dos ángulos congruentes a un tercer ángulo, son congruentes entre sí:

$A\hat{O}B \cong C\hat{D}E \wedge C\hat{D}E \cong H\hat{I}J \Rightarrow A\hat{O}B \cong H\hat{I}J$ (propiedad transitiva).

Decimos entonces que la congruencia de ángulos es una relación de equivalencia.

## Definición 9.2.3: Bisectriz de un ángulo

Sea el ángulo $AOB$ y $P$ un punto en el interior del $A\hat{O}B$. La semirrecta $OP$ se llama *bisectriz* del ángulo si y sólo si determina en él dos ángulos congruentes (figura 9.13).




$\hat{\phi} \cong \hat{\beta} \Leftrightarrow \phi = \beta$

Figura 9.13

$\overset{\circ\!\longrightarrow}{OP}$ es bisectriz de $A\hat{O}B \Leftrightarrow A\hat{O}P \cong P\hat{O}B$ .

## Teorema 9.2.2

La bisectriz de un ángulo es única. Su demostración se deja como ejercicio.

## Teorema 9.2.3: Adición de ángulos

Si $P$ está en el interior del $A\hat{O}B$ y $Q$ está en el interior del $M\hat{R}S$, con $A\hat{O}P \cong M\hat{R}Q$ y $P\hat{O}B \cong Q\hat{R}S$, entonces $A\hat{O}B \cong M\hat{R}S$ (figura 9.14).

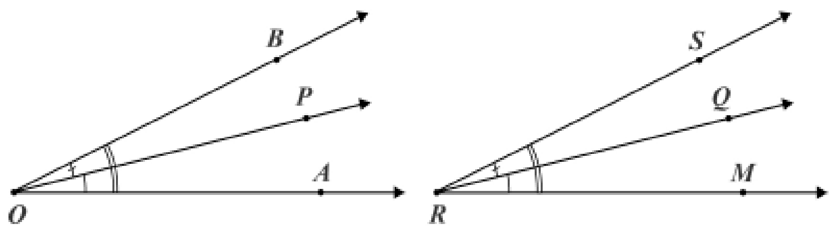



Figura 9.14

**Demostración**

Como $P$ y $Q$ son puntos interiores (hipótesis), del postulado de la adición de ángulos tenemos:

1*a*. $m(A\hat{O}B) = m(A\hat{O}P) + m(P\hat{O}B).$

b. $m(M\hat{R}S) = m(M\hat{R}Q) + m(Q\hat{R}S).$

Si aplicamos la definición de congruencia en la hipótesis obtenemos:

2*a*. $m(A\hat{O}P) = m(M\hat{R}Q).$

b. $m(P\hat{O}B) = m(Q\hat{R}S).$

Si sustituimos (2.a) y (2.b) en (1.b) obtenemos:

3. $m(M\hat{R}S) = m(A\hat{O}P) + m(P\hat{O}B).$

De las afirmaciones (1.a) y (3) tenemos:

$m(A\hat{O}B) = m(M\hat{R}S).$

Luego $A\hat{O}B \cong M\hat{R}S.$

## Teorema 9.2.4: Sustracción de ángulos

Si $P$ está en el interior del $A\hat{O}B$ y $Q$ está en el interior del $M\hat{R}S$, con $A\hat{O}P \cong M\hat{R}Q$ y $A\hat{O}B \cong M\hat{R}S$, entonces $P\hat{O}B \cong Q\hat{R}S$ (figura 9.14). Su demostración queda como ejercicio.

## Definición 9.2.4: Desigualdad de ángulos

Si $D$ está en el interior de $A\hat{O}B$, entonces $m(A\hat{O}B) > m(D\hat{O}A)$ o $m(A\hat{O}B) > m(D\hat{O}B)$ (figura 9.15).

En adelante, si $A\hat{O}B \cong \hat{\beta}$ y $A\hat{O}D \cong \hat{\alpha}$, entonces $m(A\hat{O}B) > m(A\hat{O}D)$ se puede escribir $\beta > \alpha$, en lugar de $m(\hat{\beta}) > m(\hat{\alpha})$ o de $m(A\hat{O}B) > m(A\hat{O}D)$.

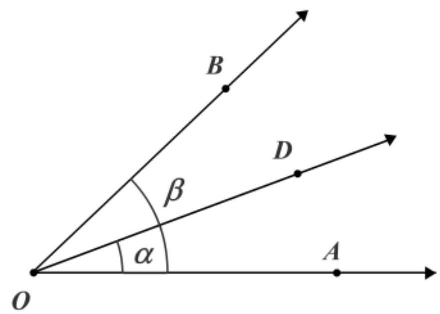



Figura 9.15

## Teorema 9.2.5

Las bisectrices de ángulos congruentes determinan ángulos congruentes. La demostración se deja como ejercicio.

## 9.3 Clases de ángulos

## Definición 9.3.1

Un ángulo es *agudo* si y sólo si su medida es mayor que 0º y menor que 90º, y un ángulo es *obtuso* si y sólo si su medida es mayor que 90º y menor que 180º.

## Definición 9.3.2

Dos ángulos se llaman ángulos *complementarios* si y sólo si la suma de sus medidas es 90º y se dice que uno es el complemento del otro.

## Teorema 9.3.1

Los complementos de ángulos congruentes, son congruentes.

## Definición 9.3.3

Dos ángulos se llaman ángulos *suplementarios* si y sólo si la suma de sus medidas es 180º, y se dice que uno es el suplemento del otro.

## Teorema 9.3.2

Los suplementos de ángulos congruentes, son congruentes.

## Definición 9.3.4

Dos ángulos que tienen un lado común y los otros lados son semirrectas opuestas se dice que forman un *par lineal* (figura 9.16).

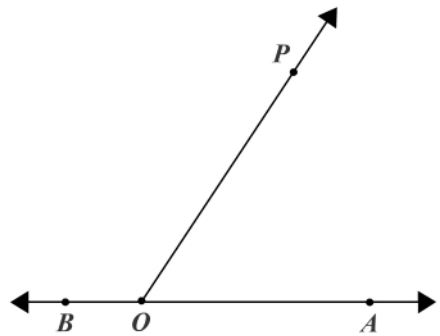



Figura 9.16

$A\hat{O}P$ y $P\hat{O}B$ forman un par lineal.

## Definición 9.3.5

Dos ángulos coplanares son ángulos *adyacentes* si y sólo si tienen un lado común y los otros dos lados están situados en semiplanos diferentes cuyo borde contiene el lado común (figura 9.17).

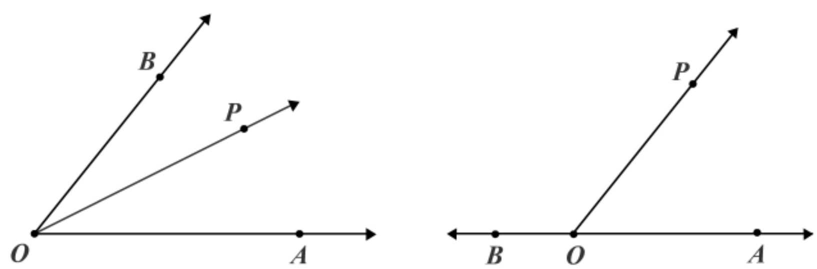



Figura 9.17

En la figura 9.17, $A\hat{O}P$ y $B\hat{O}P$ son ángulos adyacentes, pero $A\hat{O}P$ y $A\hat{O}B$ no son ángulos adyacentes.

**Nota:** los ángulos de un par lineal son entonces ángulos adyacentes suplementarios.

## Definición 9.3.6

Dos ángulos cuyos lados son rayos opuestos se llaman ángulos *opuestos por el vértice* (figura 9.18) o *par vertical*.

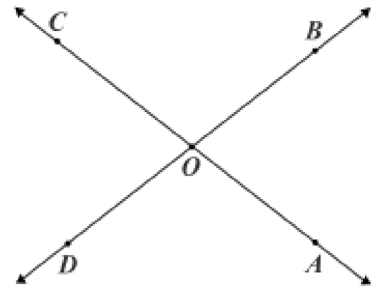



Figura 9.18

En la figura anterior $A\hat{O}B$ y $C\hat{O}D$ son opuestos por el vértice, igualmente $B\hat{O}C$ y $D\hat{O}A$.

## Teorema 9.3.3

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes (figura 9.19)

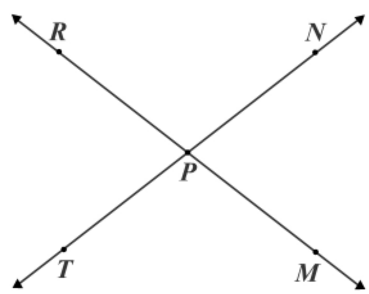



Figura 9.19

Hipótesis: $M\hat{P}N$ y $R\hat{P}T$ son opuestos por el vértice.

Tesis: $M\hat{P}N \cong R\hat{P}T$.

**Demostración**

$M\hat{P}N$ y $R\hat{P}T$ son opuestos por el vértice (hipótesis), y por la definición $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PM}$ son opuestos, lo mismo que $\overrightarrow{PN}$ y $\overrightarrow{PT}$, luego $M\hat{P}R$ y $N\hat{P}T$ son ángulos llanos y su medida es 180º.

Por el postulado de la adición de ángulos:

1. $m(M\hat{P}N)+m(N\hat{P}R)=m(M\hat{P}R)=180°.$
2. $m(N\hat{P}R)+m(R\hat{P}T)=m(N\hat{P}T)=180°.$

De 1 tenemos: $m(M\hat{P}N)=180°-m(N\hat{P}R).$

De 2 tenemos: $m(R\hat{P}T)=180°-m(N\hat{P}R).$

Luego: $m(M\hat{P}N)=m(R\hat{P}T),$ y concluimos que $M\hat{P}N \cong R\hat{P}T.$

## Definición 9.3.7

Si los ángulos de un par lineal son congruentes, cada uno de los ángulos se llama ángulo *recto*.

## Teorema 9.3.4

La medida de un ángulo recto es 90º (figura 9.20).

**Corolario 9.3.1**
Los ángulos rectos son congruentes.

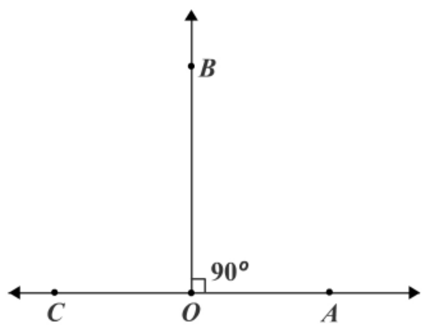



Figura 9.20

$A\hat{O}B$ y $B\hat{O}C$ son ángulos rectos.

## Definición 9.3.8: Perpendicularidad

Si las rectas $\ell_1$ y $\ell_2$ se cortan formando un ángulo recto se dice que son *perpendiculares* y escribimos $\ell_1 \perp \ell_2$ (figura 9.21).

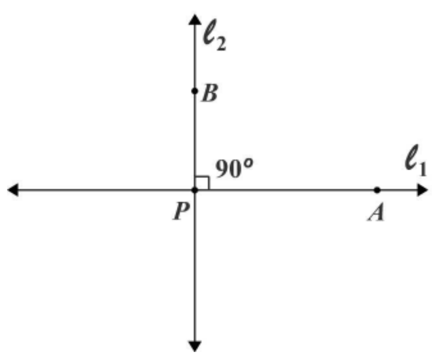



Figura 9.21

Si $\ell_1$ y $\ell_2$ se cortan en $P$ y $A \in \ell_1$ y $B \in \ell_2$, entonces la definición de perpendicularidad se cumple para los rayos y los segmentos y escribimos $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$ y $\overline{PA} \perp \overline{PB}$.

## Teorema 9.3.5

Dos rectas perpendiculares forman cuatro ángulos rectos.

## Teorema 9.3.6

Si dos rectas incidentes forman ángulos adyacentes congruentes, son perpendiculares (figura 9.22).

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ incidentes en $O$, $C\hat{O}B \cong C\hat{O}A$.

Tesis: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

**Demostración**

$A-O-B$ y $C-O-D$ porque $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son incidentes en $O$. Además $A\hat{O}B$ es rectilíneo y $C\hat{O}B$ y $C\hat{O}A$ forman ángulos rectos (definición de ángulo recto). Concluimos entonces que $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (definición de rectas perpendiculares).

Observemos que si $\ell_1$ y $\ell_2$ son perpendiculares, ellas se cortan en un punto (son incidentes).

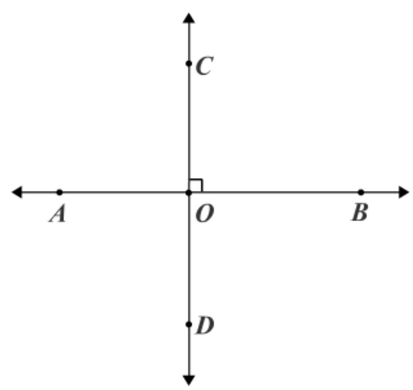



Figura 9.22

## Definición 9.3.9: Mediatriz de un segmento

Se llama *mediatriz* de un segmento a la recta que es perpendicular al segmento en el punto medio de éste (figura 9.23).

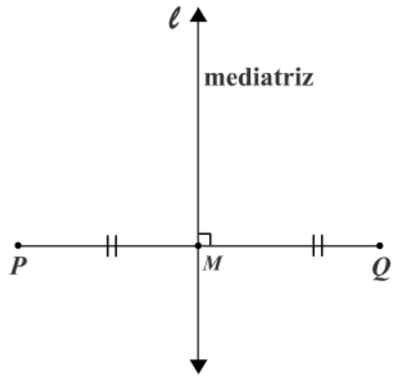



**Figura 9.23**

$\ell$ es mediatriz de $\overline{PQ}$ si y sólo si $\ell \perp \overline{PQ}$ y $\overline{PM} \cong \overline{MQ}$ .

# Ejercicios
## Módulo 9

1. De acuerdo con la figura 1, determine los puntos que están:

   a. En el interior del $A\hat{B}C$.

   b. En el $A\hat{B}C$.

   c. En el exterior del $A\hat{B}C$.

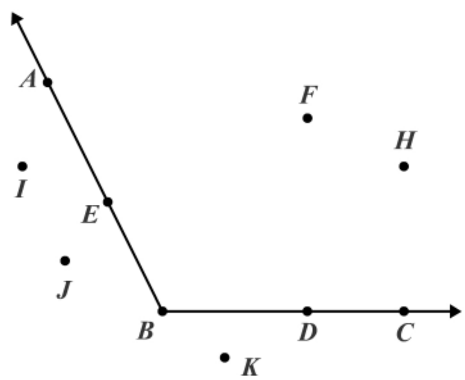



Figura 1

2. ¿El vértice de un ángulo está en el interior? ¿En el ángulo? Explique.

3. ¿Es el ángulo un conjunto convexo? Explique.

Complete cada una de las siguientes afirmaciones (4 a 12):

4. Un ángulo con medida menor que 90º es ______________________________

5. Si un $A\hat{B}C$ es recto, entonces $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ son ______________________________

6. Ángulos coincidentes son ______________________________

7. Ángulos con la misma medida son ______________________________

8. Un ángulo con medida mayor que 90º es ______________________________

9. El suplemento de un ángulo recto es ______________________________

10. Complementos de ángulos congruentes son ______________________________

11. Los ángulos que forman un par lineal son ______________________________

12. El suplemento de un ángulo agudo es ______________________________

13. Determine el suplemento de cada uno de los siguientes ángulos:
a. 80º b. 100º c. $n$º d. 90 e. $180° - n°$

14. Dos rectas $AB$ y $CD$ se cortan en $O$. Si $m(A\hat{O}D) = 50°$, halle la medida de los otros ángulos.

15. Dos ángulos son complementarios y uno de ellos excede al otro en 20º. ¿Cuánto mide cada uno?

16. Halle la medida de dos ángulos que son suplementarios y opuestos por el vértice.

17. Halle la medida de dos ángulos si son suplementarios y la medida del mayor es el doble de la medida del menor.

18. Halle la medida de dos ángulos suplementarios si la medida del mayor es 20º menor que tres veces la medida del menor.

19. Demuestre el teorema 9.2.3.

20. Demuestre el teorema 9.2.5.

21. Demuestre el teorema 9.3.1.

22. Demuestre el teorema 9.3.2.

23. Demuestre el teorema 9.3.4.

24. Demuestre el teorema 9.3.5.

# Módulo 10

## Polígonos

### Contenidos del módulo

10.1 Polígonos - Círculo

### Objetivos del módulo

1. Identificar las clases de líneas.
2. Determinar los elementos de un polígono.
3. Clasificar los polígonos.
4. Expresar los nombres de los polígonos.
5. Establecer la diferencia entre circunferencia y círculo.
6. Distinguir los elementos en la circunferencia y el círculo.
7. Diferenciar las dimensiones de los subconjuntos del espacio.

### Preguntas básicas

1. ¿Qué es una línea quebrada, abierta, cerrada, convexa, no convexa?
2. ¿Qué es una línea poligonal?
3. ¿Qué es un polígono?
4. ¿Cuáles son los elementos de un polígono?
5. ¿Cómo se clasifican los polígonos?
6. ¿Cómo se llaman los polígonos?
7. ¿Qué es una línea curva, cerrada, abierta?
8. ¿Qué es una circunferencia? ¿Qué es un círculo?
9. ¿Qué son figuras unidimensionales, bidimensionales, tridimensionales?

### Introducción

En este módulo se estudian las generalidades que presentan los polígonos y la circunferencia como figuras básicas en la geometría y de cuyas propiedades nos ocupamos más adelante.

**Arquímedes**

(287-212 a.C.). Matemático griego nacido y muerto en Siracusa.

Vea el módulo 10 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

## 10.1 Polígonos - Círculo

Hemos estudiado la línea recta y sus propiedades. Veamos ahora otros tipos de "líneas" y las figuras geométricas que pueden formar.

### Definición 10.1.1

Sean $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $n$ puntos en el plano; la unión de los segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \cdots, \overline{A_{n-1}A_n}$ se llama línea *quebrada* (figura 10.1).

La línea quebrada es *abierta* si $A_1$ y $A_n$ no están unidos, y es *cerrada* si $A_1$ y $A_n$ están unidos.

### Definición 10.1.2

Una línea quebrada es *convexa* si una línea recta cualquiera la corta a lo sumo en dos puntos. En caso contrario se dice que es *no convexa* (figura 10.1).

### Definición 10.1.3

Una línea quebrada cerrada convexa se llama *línea poligonal* (figura 10.1).

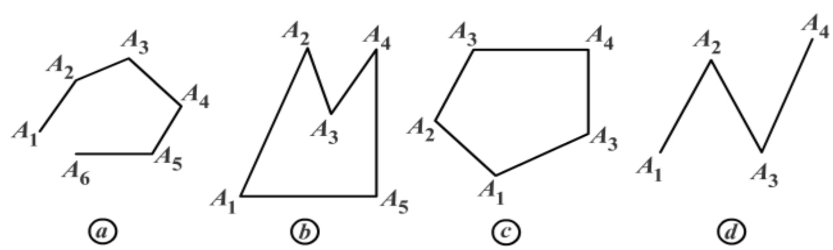



**Figura 10.1**

a. Línea quebrada abierta convexa.
b. Línea quebrada cerrada.
c. Línea quebrada cerrada convexa o también línea poligonal.
d. Línea quebrada abierta no convexa.

### Definición 10.1.4

El conjunto de puntos del plano (o porción del plano) limitado por una línea poligonal se llama *polígono* (figura 10.1).

Los puntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ se llaman vértices del polígono. Los segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}, \cdots,$ $\overline{A_nA}$ son los *lados* del polígono.

Los ángulos $A_1\widehat{A_2}A_3, A_2\widehat{A_3}A_4, \cdots, A_n\widehat{A_1}A_2$ se llaman ángulos interiores del polígono.

Se llama *perímetro* del polígono a la suma de las medidas de los lados; lo denotamos por $2p$ y tenemos:

$$2p = A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_nA_1$$

Se llama *diagonal* de un polígono al segmento de recta que une dos vértices no consecutivos. Ejemplo: $\overline{A_1A_3}, \overline{A_2A_4}$, etc. (figura 10.1*c*).

Un punto *P* está en el interior de un polígono si cualquier rayo de origen *P* corta a la línea poligonal. Los puntos que no son interiores del polígono ni están en la línea poligonal constituyen el exterior del polígono (figura 10.2).

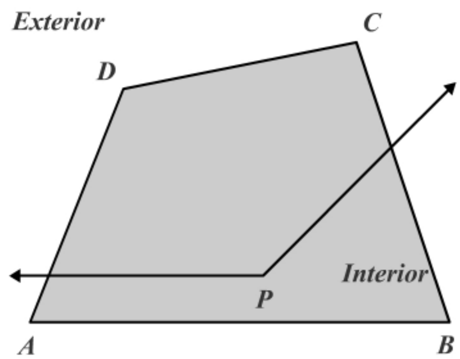



Figura 10.2

## Definición 10.1.5

La línea poligonal unida a sus puntos interiores se llama *región poligonal*. Un polígono se representa por la línea poligonal y se nombra con las letras de los vértices consecutivos: $A_1A_2 \cdots A_n$.

## Definición 10.1.6

Un polígono es *equilátero* si y sólo si tiene todos sus lados congruentes.

Un polígono es *equiángulo* si y sólo si todos sus ángulos son congruentes.

## Definición 10.1.7

Un polígono es *regular* si y sólo si es equilátero y equiángulo. En caso contrario se dice que es *irregular*.

Los polígonos reciben nombres de acuerdo a su número de lados, así (tabla 10.1):

**Arquímedes**

Las ideas de Arquímedes están reflejadas en una de las proposiciones iniciales de su obra *Sobre los cuerpos flotantes*, pionera de la hidrostática; corresponde al famoso principio que lleva su nombre y, como allí se explica, haciendo uso de él es posible calcular la ley de una aleación.

Una de las obras más importantes de Arquímedes es *Equilibrios planos*, en el que fundamentó la ley de la palanca deduciéndola a partir de un número reducido de postulados y determinó el centro de gravedad de paralelogramos, triángulos, trapecios y el de un segmento de parábola. En la obra *Sobre la esfera y el cilindro* utilizó el método denominado de exhaustión, precedente del cálculo integral, para determinar la superficie de una esfera y para establecer la relación entre una esfera y el cilindro circunscrito en ella.

Arquímedes además es famoso por aplicar la ciencia a la vida diaria. Por ejemplo, descubrió el principio que lleva su nombre mientras se bañaba. También desarrolló máquinas sencillas como la palanca o el tornillo y las aplicó a usos militares y de irrigación.

**Tabla 10.1**. Nombres de los polígonos según el número de lados que tengan

| *Número de lados* | *Nombre* | *Número* | *Nombre* |
|---|---|---|---|
| 3 | Triángulo | 8 | Octágono |
| 4 | Cuadrilátero | 9 | Nonágono |
| 5 | Pentágono | 10 | Decágono |
| 6 | Hexágono | 11 | Ondecágono |
| 7 | Heptágono | 12 | Dodecágono |

En general, *n*-ágono es un polígono de *n* lados.

En la figura 10.3 se muestran algunas situaciones características de los polígonos.

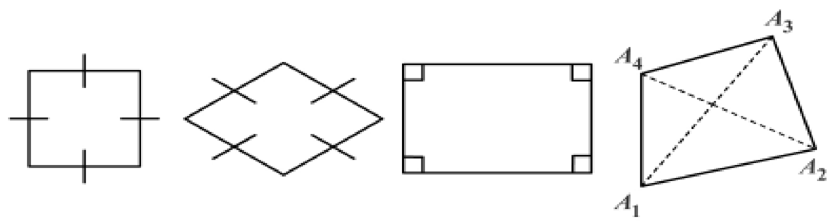



**Figura 10.3**

## Teorema 10.1.1

El número de diagonales de un polígono de *n* lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.

## Definición 10.1.8: Línea curva

Se llama *línea curva* a una línea que no tiene segmentos rectilíneos. Una línea curva puede ser abierta o cerrada, convexa o no convexa. En la figura 10.4 se muestran algunas líneas curvas.

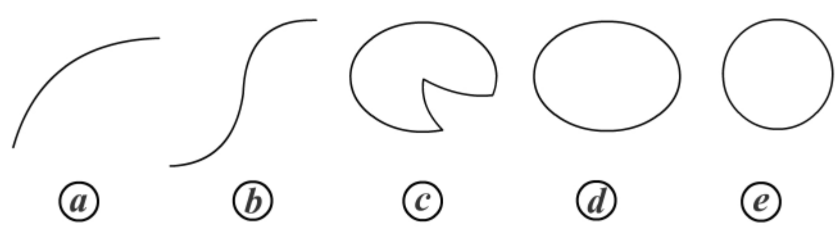



**Figura 10.4**

a. Línea curva abierta convexa.
b. Línea curva abierta no convexa.
c. Línea curva cerrada no convexa.
d. y e. Líneas curvas cerradas convexas.

## Definición 10.1.9

Una línea curva cerrada convexa cuyos puntos están a igual distancia de un punto fijo del plano se llama *circunferencia*, de centro el punto fijo y de radio la distancia (figura 10.5).

Una circunferencia de centro $O$ y radio $r$ se denota $C(O,r)$, o circunferencia de centro $O$.

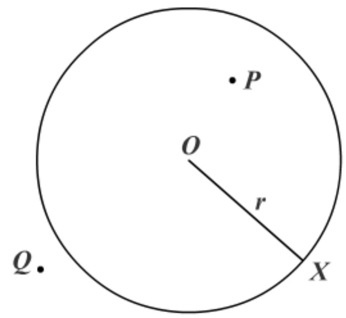



**Figura 10.5**

También se usa $O(X)$ : circunferencia de centro $O$ y que pasa por el punto $X$.

El segmento que une el centro con un punto de la circunferencia se llama segmento radial $OX$. La medida del segmento radial se llama radio: $m(\overline{OX}) = r$. Un punto $P$ pertenece al interior de una circunferencia $C(O,r)$ si y sólo si $d(O,P) < r$ (figura 10.5). Un punto $Q$ pertenece al exterior de una circunferencia $C(O,r)$ si y sólo si $d(O,Q) > r$ (figura 10.5).

## Definición 10.1.10

El conjunto de puntos del plano limitado por una circunferencia de centro $O$ y radio $r$ se llama *círculo* de centro $O$ y radio $r$ y se denota $\overline{C}(O,r)$ (figura 10.6).

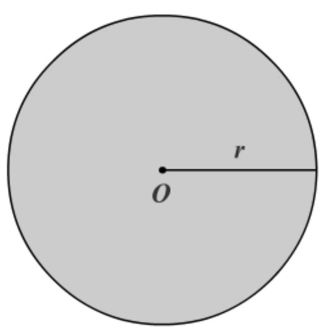



**Figura 10.6**

Vemos entonces que: $\overline{C}(O,r) = C(O,r) \cup$ interior $C(O,r)$.

Sean los puntos *A, B, C, D* sobre la circunferencia de centro *O*.

*Cuerda*: es el segmento de recta que une dos puntos distintos de la circunferencia. $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas en la figura 10.7.

*Cuerda diametral*: es una cuerda que pasa por el centro; su medida se llama diámetro. En la figura 10.7, $\overline{CD}$ es cuerda diametral y $m(\overline{CD}) = d = 2r$.

*Arco de circunferencia*: es el conjunto de puntos formado por *A* y *B* y los puntos de la circunferencia entre *A* y *B*. Se denota $\overset{\frown}{AB}$ (figura 10.7). Si los extremos del arco son los extremos de una cuerda diametral entonces el arco se llama semicircunferencia ($\overset{\frown}{CD}$ en la figura 10.7).

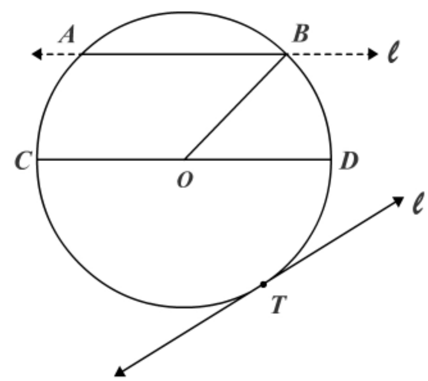



**Figura 10.7**

En la figura 10.7 $\overset{\frown}{AB}$ es un arco menor y $\overset{\frown}{ACB}$ es un arco mayor.

El ángulo cuyo vértice coincide con el centro *O* y sus lados están sobre los segmentos radiales se llama ángulo central ($B\hat{O}D$ en la figura 10.7).

Una recta $\ell$ en el mismo plano de una circunferencia *O* es *tangente* a la circunferencia si y sólo si la interseca en un punto. El punto se llama punto de tangencia y se dice que la circunferencia y la recta son tangentes en un punto (figura 10.7). Una recta $\ell$ es *secante* a una circunferencia si y sólo si la interseca en dos puntos. $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ en la figura 10.7 son rectas secantes a la circunferencia.

Dos circunferencias son iguales si y sólo si coinciden en todos sus puntos. Dos circunferencias son congruentes si y sólo si tienen radios iguales.

Las circunferencias son concéntricas si y sólo si tienen el mismo centro y diferentes radios.

Una circunferencia está *inscrita* en un polígono si y sólo si los lados del polígono son tangentes a la circunferencia; esto equivale a decir que el polígono está circunscrito a la circunferencia. Una circunferencia está *circunscrita* a un polígono si y sólo si los vértices del polígono están en la circunferencia. Lo anterior es equivalente a afirmar que el polígono está inscrito en la circunferencia.

En la figura 10.8*a* tenemos un polígono inscrito en un círculo o una circunferencia circunscrita al polígono, y en la figura 10.8*b* una circunferencia inscrita en un polígono o un polígono circunscrito a una circunferencia.

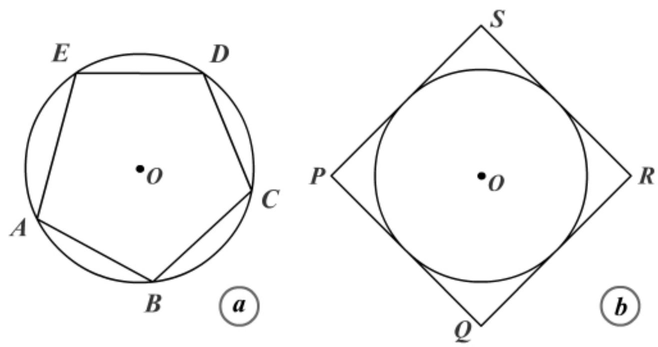



**Figura 10.8**

**Nota**: los subconjuntos del espacio se llaman figuras y éstas pueden ser:

a. Unidimensional o lineal: como la línea recta, la línea quebrada, la línea poligonal, la línea curva.
b. Bidimensional plana: si y sólo si no está situada en una línea pero sí en un mismo plano; como una región poligonal, un círculo o una región circular.
c. Tridimensional o espacial: si y sólo si no está situada en un mismo plano; como un cono, un cilindro, una esfera, una pirámide.

# Ejercicios
## Módulo 10

1. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa.

   - La circunferencia es convexa.
   - El círculo es convexo.
   - El radio pertenece a la circunferencia.
   - El segmento radial pertenece al círculo.
   - Toda recta secante determina una cuerda.
   - Toda cuerda pertenece a la circunferencia.
   - Una cuerda es la unión de dos segmentos radiales.
   - Toda circunferencia contiene al menos dos arcos diferentes.
   - El radio pertenece al círculo.
   - Todo segmento diametral es una cuerda.
   - Algunos segmentos radiales son cuerdas.
   - Una recta puede intersecar a un círculo en más de dos puntos.
   - La intersección de una circunferencia y cualquier cuerda es el conjunto vacío.
   - La intersección de una recta y una circunferencia puede ser un conjunto de tres puntos.
   - La intersección de dos cuerdas diametrales y una circunferencia de un mismo círculo es un conjunto de cuatro puntos.

Sean una circunferencia $C(O,r)$, una recta $\ell$ en el mismo plano y $d$ la distancia del centro a la recta $\ell$. Complete las siguientes proposiciones (2 a 5) de acuerdo con el enunciado anterior.

2. Si $d > r$, entonces la recta es ________________ a la circunferencia.

3. Si $d < r$, entonces la recta es ________________ a la circunferencia.

4. Si $d = 0$, entonces la recta contiene una ____________________ de la circunferencia.

5. Demuestre el teorema 10.1.1

Auto Evaluación Autoevaluación

# Capítulo 2

## Elementos básicos de la geometría

### Módulos 7 al 10

1. Determine si cada enunciado es verdadero o falso.

- Un punto puede ser la intersección de varios planos.
- Dados dos puntos diferentes, hay más de una recta que los contiene.
- Dos rectas diferentes son coplanares.
- Toda recta tiene un único punto medio.
- Cuatro puntos son coplanares.
- El plano contiene al menos dos puntos.
- Si $p \in$ semiplano $\alpha$, y $Q \in$ semiplano $\alpha$, entonces $\overline{PQ} \subset \alpha$.
- Si $\overline{AB} \cap \ell = \phi$, entonces $A$ y $B$ se encuentran en regiones opuestas de $\ell$.
- Los ángulos opuestos por el vértice son suplementarios.
- Un par lineal está formado por ángulos adyacentes.
- Dos ángulos adyacentes forman un par lineal.
- Dos ángulos suplementarios forman una par lineal.
- Los ángulos de un par lineal son suplementarios.
- El ángulo es un conjunto convexo.
- La región angular es un conjunto convexo.
- Los ángulos de un polígono son subconjuntos del polígono.
- El interior de un polígono pertenece al polígono.

- Los ángulos complementarios son agudos.
- Si dos rectas son perpendiculares, se forman cuatro ángulos rectos.
- Dos rectas perpendiculares son incidentes.

Complete las preguntas 2 a 9:

2. Un ángulo ___________ es mayor que su suplemento.
3. Si la suma de las medidas de dos ángulos es _____, los ángulos son _______________.
4. La _________ de un ángulo lo divide en dos ángulos.
5. La _________ de un ángulo lo divide __________ en dos segmentos.
6. La diferencia entre las medidas del suplemento y el complemento de un ángulo siempre es ___________________.
7. La suma de las medidas de los ángulos adyacentes consecutivos con el mismo vértice es _____________________.
8. El ángulo cuya medida siempre es igual a la del suplemento es un ángulo ____________.
9. El único punto de la recta que equidista de dos de sus puntos es el punto ___________ del segmento con estos puntos como sus extremos.

En los ejercicios 10 al 15 halle la medida de cada uno de los ángulos que cumplen las condiciones dadas.

10. Los ángulos son suplementarios y uno de ellos es tres veces el otro.
11. Los ángulos son suplementarios y uno de ellos excede en 20º al cuádruplo del otro.
12. Los ángulos son complementarios y la medida del menor es 40º menor que la medida del mayor.
13. Los ángulos son complementarios y la medida del mayor es 28º mayor que la medida del menor.
14. Dé un ángulo si cuatro veces su medida es igual a cinco veces su suplemento.
15. En la figura 1 $\overrightarrow{OB}$ es bisectriz de $A\hat{O}C$ y $\overrightarrow{OD}$ es bisectriz de $E\hat{O}C$. $m(A\hat{O}C) = 50°$, $m(C\hat{O}E) = 80°$. Halle:

    a. $m(A\hat{O}B)$ b. $m(B\hat{O}D)$

    c. $m(C\hat{O}D)$ d. $m(A\hat{O}E)$

    e. $m(B\hat{O}E)$ f. $m(D\hat{O}A)$

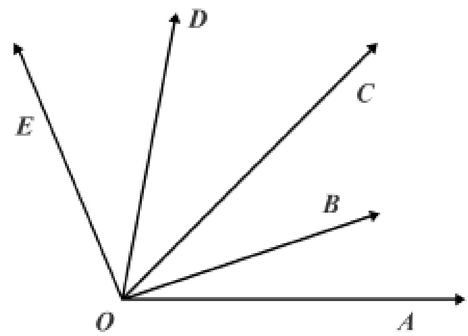



**Figura 1**

16. En la figura 2 las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ , $\overleftrightarrow{CD}$ , $\overleftrightarrow{EF}$ se cortan en el punto $O$ y $A\hat{O}E \cong D\hat{O}F$.

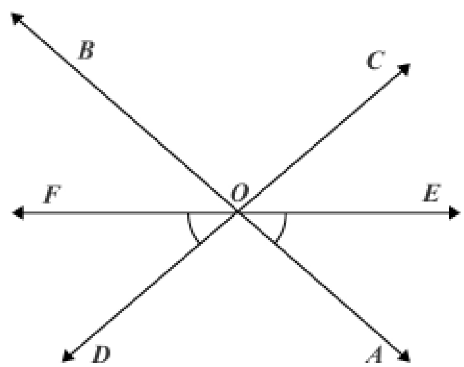



**Figura 2**

Demuestre que $\overrightarrow{OE}$ es bisectriz de $A\hat{O}C$ .

17. En la figura 3:

Hipótesis: $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{QS}$ , $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OR}$ .

Tesis: $N\hat{O}P \cong Q\hat{O}R$ , $N\hat{O}R \cong M\hat{O}P$ .

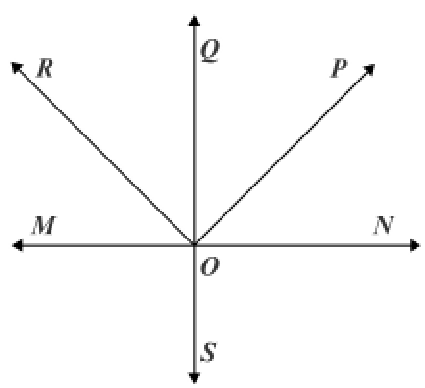



**Figura 3**

18. En la figura 4:

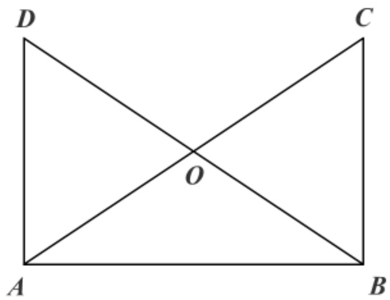



Figura 4

Hipótesis: $\overline{AD} \perp \overline{AB}$, $\overline{BC} \perp \overline{AB}$, $A-O-C$, $B-O-D$, $\hat{D} \cong \hat{C}$.

Tesis: $D\hat{A}O \cong C\hat{B}O$.

Demuestre cada una de las siguientes proposiciones (19 a 22):

19. Las bisectrices de los ángulos de un par lineal son perpendiculares.

20. Las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice están sobre la misma recta.

21. El teorema 9.3.5.

22. Las bisectrices de los ángulos formados por dos rectas incidentes son perpendiculares.

23. En la figura 5:

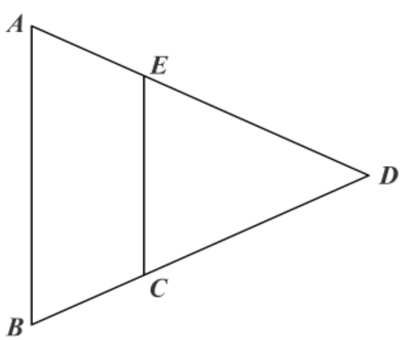



Figura 5

a. Hipótesis: $\overline{AD} \cong \overline{BD}$, $\overline{AE} \cong \overline{BC}$.

Tesis: $\overline{DC} \cong \overline{DE}$.

b. Hipótesis: $\overline{AE} \cong \overline{BC}$, $\overline{DE} \cong \overline{CD}$.

Tesis: $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.

c. Hipótesis: $\overline{ED} \cong \overline{CD}$, $\overline{AE} \cong \overline{ED}$, $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.

Tesis: $\overline{AE} \cong \overline{BC}$.

24. En la figura 6:

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ en $O$, $B\hat{O}E \cong D\hat{O}F$.

Tesis: $\overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{OE}$.

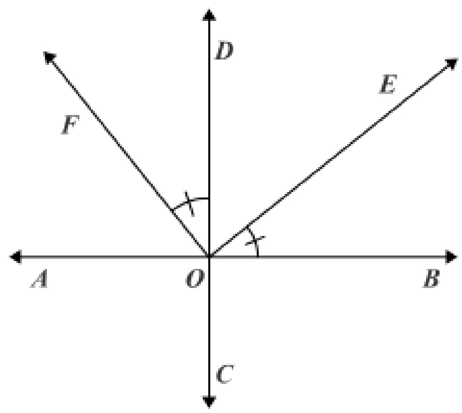



**Figura 6**

25. En la figura 7:

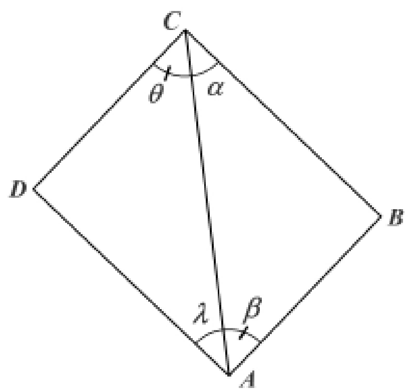



**Figura 7**

Hipótesis: $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ , $\overline{CD} \perp \overline{CB}$ , $\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$.

Tesis: $\hat{\theta} \cong \hat{\lambda}$.

26. Los puntos *A, B, C, D* son colineales en ese orden. *E* es exterior a la recta *AD* de tal manera que $m(E\hat{B}A) + m(E\hat{C}B) = 180°$.

Demuestre que $E\hat{B}C \cong E\hat{C}B$.

27. Los puntos *A, B, C, D* son colineales en ese orden. *O* es el punto medio de $\overline{AD}$ y de $\overline{BC}$ . Demuestre que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ .

28. Los puntos *O, A, B* son colineales. *X* es punto medio de $\overline{AB}$ . Demuestre que:

a. $OX = (OA + OB)/2$ si $O - A - B$ .

b. $OX = (OB - OA)/2$ si $A - O - B$ .

29. *A, B, C, D* son colineales en ese orden. Si $2BC = CD,$ demuestre que $AC = (2AB + AD)/3$ .

# Autoevaluación

30. *A, B, C, D* son colineales en ese orden. Si $\dfrac{BD}{m}=\dfrac{CD}{n}$, demuestre que $\dfrac{nAB-mAC}{n-m}=AD$.

31. $A\hat{O}B$ y $B\hat{O}C$ son dos ángulos adyacentes tales que $m(A\hat{O}C)-m(A\hat{O}B)=90°$, $\overrightarrow{OX}$ es la bisectriz de $A\hat{O}B$ y $\overrightarrow{OY}$ es la bisectriz de $A\hat{O}C$. Halle $m(X\hat{O}Y)$.

32. Cuatro semirrectas coplanares consecutivas *OA*, *OB*, *OC* y *OD* forman ángulos tales que $D\hat{O}A\cong C\hat{O}B$, $m(C\hat{O}B)=2m(A\hat{O}B)$, $m(C\hat{O}D)=3m(A\hat{O}B)$.

a. Halle $m(A\hat{O}B)$, $m(D\hat{O}A)$, $m(C\hat{O}D)$.

b. Demuestre que las bisectrices de $A\hat{O}B$ y $C\hat{O}D$ están sobre la misma recta.

33. Desde un punto *O* sobre la recta *X’ X* se trazan las semirrectas *OA* y *OB* en un mismo semiplano y las bisectrices de los ángulos *XOA*, *AOB*, *BOX’*. Halle las medidas de los ángulos, sabiendo que $m(X'\hat{O}B)=m(X\hat{O}A)$ y que las bisectrices de los ángulos extremos forman un ángulo de medida 100º.

34. $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son semirrectas opuestas. Los puntos *E, F, H* están en el mismo semiplano de borde $\overleftrightarrow{AB}$. Los puntos *E* y *H* están en semiplanos opuestos respecto a $\overrightarrow{BF}$. Los puntos *A* y *H* están en igual semiplano respecto a $\overleftrightarrow{BF}$; $\overleftrightarrow{BF}\perp\overleftrightarrow{AC}$; $\overleftrightarrow{BE}\perp\overleftrightarrow{BH}$; $m(F\hat{B}E)=20°$. Dibuje la figura y halle $m(E\hat{B}A)$, $m(F\hat{B}H)$, $m(F\hat{B}C)$.

35. $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ son la bisectrices de dos ángulos agudos adyacentes $A\hat{O}B$ y $B\hat{O}C$, respectivamente, y cuya diferencia de medidas es 40º. $\overrightarrow{OZ}$ es la bisectriz de $X\hat{O}Y$. Calcule el ángulo que hace $\overrightarrow{OZ}$ con:

a. El lado $\overrightarrow{OB}$ común a los ángulos.
b. La bisectriz del ángulo *AOC*.

36. En un mismo semiplano se dan las semirrectas *OA, OB, OC, OD* y *OE*, tales que $E\hat{O}D\cong D\hat{O}A$; $C\hat{O}B\cong B\hat{O}A$; $m(A\hat{O}E)-m(A\hat{O}C)=90°$. Determine de qué ángulos es $\vec{OC}$ bisectriz.